Université Paris 8 — Année 2021–2022

M1 Mathématiques et applications, parcours ACC et CSSD

Théorie de l'information – Feuille de TD 1

23/09/2021

Le corrigé de certains exercices sera disponible à l'adresse suivante :

`www.math.univ-paris13.fr/~lavauzelle/teaching/2021-22/theorie-information.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin 💻 sur machine

Exercice 1. ($\star$) Applications numériques.

Question 1.– Un tirage de la loterie consiste à choisir uniformément et sans remise 5 boules parmi 49, puis, de manière indépendante, à tirer un numéro complémentaire entre 1 et 10. Calculer l'entropie du tirage (on donnera une valeur approchée).

Question 2.– Comparer les entropies des variables aléatoires suivantes :

(i) 3 dés à 4 faces,
(ii) 2 dés à 6 faces,
(iii) 1 dé à 12 faces.

On supposera que les dés sont équilibrés.

Question 3.– On considère la distribution jointe suivante :

$p_{XY}(x,y)$	x_1	x_2
y_1	$\frac{1}{4}$	0
y_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$

Comparer les valeurs de $H(X)$, $H(Y)$, $H(X \mid Y)$ et $H(Y \mid X)$.

Exercice 2. ($\star\star$) Entropie et tirages uniformes.

Soit X une variable aléatoire de distribution $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$.

Question 1.– Quelle est l'entropie de X ? Quelle serait l'entropie maximale d'une variable aléatoire à image dans un ensemble à 4 élements ?

Soit U la variable aléatoire uniforme sur $\{0, 1\}$. On considère l'algorithme suivant :

1. Tirer $u_1 \leftarrow U$. Si $u_1 = 0$, retourner $x = 1$.
2. Sinon, tirer un nouvel élément $u_2 \leftarrow U$. Si $u_2 = 0$, retourner $x = 2$.
3. Sinon, tirer un nouvel élément $u_3 \leftarrow U$. Si $u_3 = 0$, retourner $x = 3$. Sinon, retourner $x = 4$.

On suppose que les tirages successifs de U sont indépendants.

Question 2.– Démontrer que l'algorithme retourne la valeur i avec probabilité p_i, où p_i est défini plus haut.

Question 3.– Quelle est le nombre moyen de tirages de U lors d'une exécution de l'algorithme ? Comparer avec l'entropie de X.

Exercice 3. ($\star\star$) Entropie conditionnelle.

On considère une rencontre sportive en deux manches gagnantes, entre deux adversaires A et B. On suppose que, pour toutes les manches de la rencontre, l'évènement « A gagne la manche » suit une loi de Bernoulli de paramètre $0 < t < 1$. On suppose également que ces variables sont indépendantes.

On note :

— Ω l'ensemble des scores possibles de la rencontre (qu'on peut écrire sous la forme de chaînes de 2 ou 3 caractères, comme $'aa'$ pour signifier que A a gagné la rencontre en deux manches), et p sa loi de probabilité associée,

— $\mathcal{X} = \{A, B\}$ l'ensemble des gagnant·e·s possibles de la rencontre, et X la variable associée,

— $\mathcal{N} = \{2, 3\}$ l'ensemble correspondant au nombre de manches du match, et N la variable associée,

— $\mathcal{Y} = \{a^*, b^*\}$ l'ensemble représentant le·a gagnant·e de la première manche, et Y la variable associée (a^* signifie que A a gagné la première manche).

Question 1.– Donner la distribution de probabilités de p, ainsi que des lois des variables X, Y et N.

Question 2.– Calculer et comparer les entropies $H(X)$, $H(Y)$ et $H(X,Y)$.

Question 3.– Rappeler comment se comparent génériquement $H(N)$ et $H(N\,|\,Y)$. Calculer $H(N)$, $H(N\,|\,Y = a^*)$ et $H(N\,|\,Y = b^*)$. Commenter.