Université Paris 8 Année 2021–2022

M1 Mathématiques et applications, parcours ACC et CSSD

Théorie de l'information – Feuille de TD 2

30/09/2021

Le corrigé de certains exercices sera disponible à l'adresse suivante :

`www.math.univ-paris13.fr/~lavauzelle/teaching/2021-22/theorie-information.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin 💻 sur machine

Exercice 1. ($\star$) Information mutuelle.

Question 1.– Lors d'un lancer de pièce (supposée équilibrée), quelle est l'information mutuelle entre chacune des deux faces de la pièce ?

Question 2.– Lors d'un lancer de dé à 6 faces équilibré, quelle est l'information mutuelle entre deux faces opposées du dé ? Et entre deux faces adjacentes ?

Question 3.– Dans une urne contenant $n = 4$ boules noires et $r = 2$ boules rouges, on effectue deux tirages consécutifs et sans remise d'une boule. On note T_1 le premier tirage et T_2 le second tirage. Calculer l'information mutuelle entre ces deux tirages.

Exercice 2. ($\star\star$) Entropie de la somme de deux variables réelles.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies sur un même espace probabilisé. On définit ensuite $Z = X + Y$.

Question 1.– Démontrer que $H(Z) \leq H(X) + H(Y)$.

Question 2.– Démontrer que $H(Z \mid X) = H(Y \mid X)$.

Question 3.– Démontrer que si X et Y sont indépendantes, alors on a

$$H(X) \leq H(Z) \quad \text{et} \quad H(Y) \leq H(Z)\,.$$

Question 4.– Trouver un exemple de variables X et Y pour lesquelles on a simultanément

$$H(Z) < H(X) \quad \text{et} \quad H(Z) < H(Y)\,.$$

Exercice 3. ($\star\star$) Entropie maximale à espérance fixée.

Soit Γ la loi géométrique de paramètre $\gamma > 0$. On rappelle que Γ est une variable aléatoire discrète (mais non finie) à valeurs entières, et qu'elle est donnée par

$$p(\Gamma = n) := (1-\gamma)\gamma^n, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Question 1.– Calculer l'espérance de Γ.

Question 2.– Calculer $H(\Gamma)$.

Question 3.– Démontrer que toute variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérance $\mu = \mathbb{E}(\Gamma)$, vérifie :

$$H(X) \leq H(\Gamma)\,.$$

Indication : on peut établir la relation $H(\Gamma) - H(X) = D_{\mathrm{KL}}(p_X \,\|\, p_\Gamma)$.

Exercice 4. ($\star\star$) Information mutuelle d'un tirage sans remise.

Dans une urne contenant n boules noires et r boules rouges, on effectue deux tirages consécutifs et sans remise d'une boule. On note T_1 le premier tirage et T_2 le second tirage.

On note $h(t) = -t\log_2(t) - (1-t)\log_2(1-t)$ la fonction d'entropie binaire, et $\rho = \frac{r}{r+n}$.

Question 1.– Démontrer que l'information mutuelle $I(T_1\,;T_2)$ vérifie

$$I(T_1\,;T_2) = h(\rho) - \rho h\Big(\frac{1}{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}}\Big) - (1-\rho)h\Big(\frac{1}{\frac{1}{1-\rho} - \frac{1}{n}}\Big)\,.$$

Question 2.– Dans le cas $n = r$, exprimer l'information mutuelle $I(T_1\,;T_2)$ en fonction de n. Commenter l'asymptotique lorsque $n \to \infty$.

Question 3.– Dans le cas $r = 1$, exprimer l'information mutuelle $I(T_1\,;T_2)$ en fonction de n. Commenter l'asymptotique lorsque $n \to \infty$.

Question 4.– Donner l'asymptotique de $I(T_1\,;T_2)$ lorsque le rapport $\rho = \frac{r}{r+n}$ est fixé et $r, n \to \infty$.

Exercice 5. ($\star\star$) Entropie et probabilité maximale.

Soit X une variable aléatoire de distribution $p_1, \ldots, p_n$. On note $p^* = \max\{p_i\}_{1\leq i\leq n}$.

Question 1.– Montrer que $H(X) \geq -\log p^*$.

Question 2.– Démontrer que, pour tous $a, b \geq 0$ avec $a + b > 0$, on a :

$$-(a+b)\log(a+b) \leq -a\log a - b\log b \leq -(a+b)\log\frac{a+b}{2}\,.$$

Démontrer également que la première égalité se produit si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$, et que la seconde se produit si et seulement si $a = b$.

Question 3.– Grâce à la question précédente, montrer que $H(X) \geq h_2(p^*)$, où $h_2(t) := -t\log_2 t - (1-t)\log_2(1-t)$ est la fonction d'entropie binaire.

Question 4.– En déduire que $H(X) \geq 2(1 - p^*)$.