Université Paris 8 Année 2021–2022

M1 Mathématiques et applications, parcours ACC et CSSD

Théorie de l'information – Feuille de TD 5

21/10/2021

Le corrigé de certains exercices sera disponible à l'adresse suivante :

`www.math.univ-paris13.fr/~lavauzelle/teaching/2021-22/theorie-information.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin 💻 sur machine

Exercice 1. ($\star$) Concaténation de 2 canaux binaires symétriques.

Considérons deux canaux binaires symétriques C_1 et C_2 de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. L'entrée de C_1 est notée X, et on suppose que la sortie Y de C_1 est reliée à l'entrée de C_2. Enfin, on note Z la sortie de C_2. On note C le canal issu de la concaténation de C_1 et C_2.

Question 1.– Décrire la loi conditionnelle $Z \mid X$, ou de manière équivalente, calculer la matrice de transition de C.

Question 2.– Le canal C est-il équivalent à un canal binaire symétrique ?

Exercice 2. ($\star\star$) Capacité du canal à effacement.

Le but de cet exercice est de calculer la capacité du canal à effacement d'entrée binaire $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ et de paramètre λ. On rappelle que ce canal est donné par la matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ \lambda & \lambda \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

On note X l'entrée du canal et Y sa sortie. On désigne par $\perp$ le symbole d'effacement.

Question 1.– Exprimer $H(Y\,|\,X)$ en fonction de λ.

Question 2.– L'entrée du canal est une variable aléatoire X binaire, dont on note la probabilité $p_X(0) = \alpha$. Démontrer que

$$H(Y) = (1-\lambda)h(\alpha) + h(\lambda)\,.$$

Question 3.– En déduire que la capacité du canal à effacement est $1 - \lambda$.

Exercice 3. ($\star\star$) Canal q-aire symétrique.

Dans certains modèles de communication, notamment pour la cryptographie, il est commode de considérer comme alphabet des corps ayant un nombre fini $q \neq 2$ d'élements. On considère donc un canal dont les entrées et sorties sont à valeurs dans $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_q\}$, et qui admet comme une matrice de transition

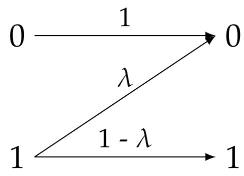
$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{\lambda}{q-1} & \cdots & \cdots & \frac{\lambda}{q-1} \\ \frac{\lambda}{q-1} & 1-\lambda & \frac{\lambda}{q-1} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{\lambda}{q-1} \\ \frac{\lambda}{q-1} & \cdots & \cdots & \frac{\lambda}{q-1} & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, un symbole $x_i \in \mathcal{X}$ est preservé avec probabilité $1-\lambda$. Il est donc modifié avec probabilité λ, et ce de manière équiprobable sur les autres symboles de la sortie.

Question 1.– Calculer la capacité du canal, et commenter.

Exercice 4. $(\star\star)$ Canal Z.

Dans cet exercice, on se propose de calculer la capacité d'un canal de transmission appelé « canal Z ». Ce canal est binaire (l'entrée et la sortie ont taille 2), et peut être défini par le diagramme suivant, lui donnant son nom.



On note X et Y les variables aléatoires, toutes deux définies sur $\{0,1\}$, associées à la sortie et à l'entrée du canal. On note $\alpha := p(X=0)$. On rappelle que

$$h(t) := t\log_2 \frac{1}{t} + (1-t)\log_2 \frac{1}{1-t}$$

est la fonction d'entropie binaire.

Question 1.– Donner la matrice de transition $\boldsymbol{M}$ du canal.

Question 2.– Calculer $H(Y\,|\,X=0)$. Interpréter.

Question 3.– Montrer que $H(Y\,|\,X) = (1-\alpha)h(\lambda)$.

Question 4.– Calculer $H(Y)$ puis $I(X\,;Y)$.

Pour $\lambda \in]0,1[$ fixé, on pose $f_\lambda(x) := h((1-\lambda)(1-x)) - (1-x)h(\lambda)$ et on note

$$\mu(\lambda) := 1 - \frac{1}{(1-\lambda)(1+2^{h(\lambda)/(1-\lambda)})}\,.$$

Question 5.– Démontrer que le minimum de f_λ sur $[0,1]$ est atteint en $x = \mu(\lambda)$.

Question 6.– En déduire que la capacité du canal Z est

$$\log_2\left(1 + \frac{1}{2^{h(\lambda)/(1-\lambda)}}\right)\,.$$

Question 7.– Que vaut cette capacité pour $\lambda \to 0$? Interpréter.