Théorie de l'information – Feuille de TD 6

28/10/2021

Le corrigé de certains exercices sera disponible à l'adresse suivante :
`www.math.univ-paris13.fr/~lavauzelle/teaching/2021-22/theorie-information.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin 💻 sur machine

Exercice 1. ($\star$) Mise en application d'un code convolutif.

On considère le code convolutif défini par les relations :

$$c_m^{(1)} = x_m + x_{m-2} + x_{m-3},$$
$$c_m^{(2)} = x_m + x_{m-1} + x_{m-3}.$$

Question 1.– Donner les représentations

1. algébrique,
2. sous forme de registre à décalage,
3. sous forme d'automate,
4. sous forme de treillis,

de ce code convolutif.

Question 2.– Encoder le mot $\boldsymbol{x} = (0101000\ldots)$.

Question 3.– À l'aide de l'algorithme de Viterbi, décoder la séquence $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{y}^{(2)})$ donnée par

$$\boldsymbol{y}^{(1)} = (111100100\ldots),$$
$$\boldsymbol{y}^{(2)} = (010001000\ldots).$$

Exercice 2. ($\star\star\star$) 💻 Implantation de l'algorithme de Viterbi.

Question 1.– Implanter l'algorithme de codage d'un code convolutif. L'algorithme prendra en entrée :

— une longueur de contrainte n,
— les k relations de parité, données sous la forme de k vecteurs de coefficients $\boldsymbol{a}^{(j)} = (a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \ldots, a_{n-1}^{(j)}) \in \{0,1\}^n$,
— un message de longueur arbitraire $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_m, \ldots) \in \{0,1\}^+$.

Il produira en sortie k mots de code $\boldsymbol{c}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{c}^{(k)}$ où

$$c_m^{(j)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(j)} x_{m-i}\,.$$

Question 2.– Implanter l'algorithme de Viterbi vu en cours. L'algorithme prendra en entrée :

— une longueur de contrainte n,

- les k relations de parité, données sous la forme de k vecteurs de coefficients $\boldsymbol{a}^{(j)} = (a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \ldots, a_{n-1}^{(j)}) \in \{0,1\}^n$,
- une séquence de k mots erronés $\boldsymbol{y}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{y}^{(k)}$ de même longueur (arbitraire).

Il produira en sortie un message binaire $\boldsymbol{x}$. On vérifiera que l'encodage de $\boldsymbol{x}$ par l'algorithme d'encodage de la question précédente produit bien des mots $\boldsymbol{c}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{c}^{(k)}$ à faible distance de $\boldsymbol{y}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{y}^{(k)}$.

Question 3.– [BONUS – difficile] Programmer une représentation graphique (forme libre) du treillis engendré par l'algorithme de Viterbi.