Université Paris 8 Année 2021–2022
M1 Mathématiques et applications, parcours ACC et CSSD

Théorie de l'information – Feuille de TD 7

04/11/2021

Le corrigé de certains exercices sera disponible à l'adresse suivante :

`www.math.univ-paris13.fr/~lavauzelle/teaching/2021-22/theorie-information.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin sur machine

Exercices de révision (cours 1–6)

Exercice 1. ($\star$) Questions autour de l'entropie.

Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs réelles. Répondre en justifiant aux questions suivantes :

Question 1.– Peut-on avoir $H(X) > 0$, $H(Y) > 0$ et $H(X+Y) = 0$?

Question 2.– Peut-on avoir $H(X) > 0$, $H(Y) > 0$ et $H(X,Y) = 0$?

Question 3.– Montrer que $H(X-Y, X+Y) = H(X,Y)$.

Question 4.– Montrer que $I(X\,;Y) \leq \min\{H(X), H(Y)\}$ et donner un cas d'égalité.

Exercice 2. ($\star\star$) Code de Huffman d'une source particulière.

Question 1.– On considère une source suivant une loi dont la distribution est :

$$(0.6, 0.25, 0.09, 0.04, 0.02)\,.$$

Donner le codage de Huffman correspondant.

Soit maintenant X une source de distribution $p_1 \geq \cdots \geq p_m$. On suppose que

$$p_i \geq 2p_{i+1}$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, m-1\}$.

Question 2.– Soit $i \geq 2$. Démontrer que $p_{i-1} \geq p_i \geq \sum_{j=i+1}^{m} p_j$.

Question 3.– À quelle étape de l'algorithme d'Huffman la probabilité p_i sera-t'elle sélectionnée pour la construction de l'arbre ? Justifier.

Question 4.– En déduire la forme de l'arbre binaire du code de Huffman associé à la source X. Quelle est la longueur maximale d'un mot de code ? La longueur minimale ?

Exercice 3. $(\star\star)$ Questions autour de la capacite d'un canal.

Question 1.– Soit C un canal de capacité κ, et X une source en entrée du canal. A-t-on toujours $\kappa \leq H(X)$? Justifier.

Question 2.– Soient C_1 et C_2 deux canaux de capacités respectives κ_1 et κ_2. On suppose que C_1 et C_2 peuvent être concaténés en un canal C de capacité κ. Autrement dit, la sortie de C_1 est connectée à l'entrée de C_2.

1. Montrer que $\kappa \leq \min\{\kappa_1, \kappa_2\}$.
2. Donner un cas d'égalité.
3. Donner un cas de non-égalité.

Question 3.– Que vaut la capacité du canal binaire symétrique de paramètre λ pour $\lambda = 1/2$? Interpréter.

Question 4.– Que vaut la capacité du canal binaire symétrique de paramètre λ (la probabilité d'erreur), pour $\lambda = 1$? Interpréter.