Université Paris 8 Année 2021–2022

M1 Mathématiques et applications, parcours ACC et CSSD

Théorie de l'information – Feuille de TD 8

02/12/2021

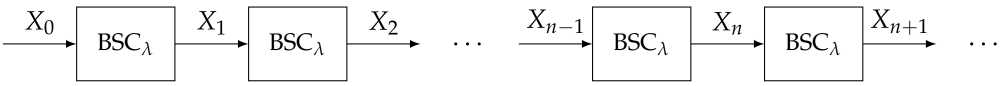
Le corrigé de certains exercices sera disponible à l'adresse suivante :

`www.math.univ-paris13.fr/∼lavauzelle/teaching/2021-22/theorie-information.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin sur machine

Exercice 1. ($\star$) Concaténation infinie de canaux.

On considère une concaténation infinie de canaux binaires symétriques de même paramètre $\lambda \in]0,1[$. On note $X_0 = X$ et X_n la sortie du n-ème canal.



Question 1.– Rappeler la matrice de transition $\boldsymbol{P}$ du canal binaire symétrique BSC$_\lambda$ ainsi que sa capacité.

Question 2.– Calculer $\boldsymbol{P}^n$ pour tout $n \geq 0$.

Question 3.– Peut-on modéliser la concaténation de n canaux binaires symétriques comme un seul canal binaire symétrique ? Si oui, en donner le paramètre λ_n.

Question 4.– Que vaut la limite de la capacité du canal concaténé, lorsque $n \to \infty$? Interpréter.

Question 5.– Soit $\boldsymbol{X} = (X_0, \dots, X_n, \dots)$ le processus stochastique associé aux entrées/sorties des canaux. Le processus $\boldsymbol{X}$ est-il markovien ? Si oui, est-il homogène ?

Question 6.– Sous quelle condition sur X_0 le processus $\boldsymbol{X}$ est-il stationnaire ?

Question 7.– Dans le cas où $\boldsymbol{X}$ est stationnaire, calculer le taux d'entropie du processus.

Exercice 2. ($\star\star$) Entropie et codage par plage.

Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_N)$ une séquence **finie** de $N \geq 1$ variables aléatoires binaires. On définit $\boldsymbol{R} = (R_1 \dots, R_M)$, où les variables R_m sont à valeurs sur $\mathbb{N}^+$, comme la séquence des longueurs de plages de symboles identiques dans $\boldsymbol{X}$. Notons que $M \leq N$, et que la valeur de M dépend de la réalisation des X_n. Par exemple, si $N = 13$ et sir $\boldsymbol{X}$ se réalise comme (1100010000111), alors $\boldsymbol{R}$ vaut $(2, 3, 1, 4, 3)$ et $M = 5$.

On note $H(\boldsymbol{X})$ l'entropie de la variable conjointe des $(X_1, \dots, X_N)$. De même, $H(\boldsymbol{R})$ est l'entropie de la variable conjointe des $(R_1, \dots, R_M)$.

Question 1.– Démontrer que $H(\boldsymbol{R}, X_1) = H(\boldsymbol{X})$.

Question 2.– En déduire que $H(\boldsymbol{X}) - H(X_1) \leq H(\boldsymbol{R}) \leq H(\boldsymbol{X})$.

Exercice 3. ($\star\star$) Longueurs de plages.

Soit $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\geq 1}$ un processus stochastique sans mémoire, dont les variables X_n sont binaires et uniformes. On note N la variable aléatoire comptant la longueur de la première plage de symboles identiques, c'est-à-dire telle que

$$X_{N+1} \neq X_N \quad \text{et} \quad \forall 2 \leq n \leq N,\, X_n = X_{n-1}\,.$$

On note enfin $\boldsymbol{Y} := (X_1, \ldots, X_N)$.

Question 1.– Déterminer le domaine des valeurs prises par les variables N et $\boldsymbol{Y}$?

Question 2.– Déterminer la loi de N, la loi de $\boldsymbol{Y}$ conditionnée à N puis en déduire la loi de $\boldsymbol{Y}$.

Question 3.– Démontrer que :

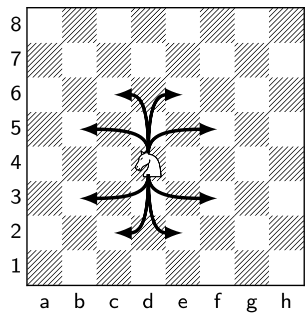
1. $H(\boldsymbol{Y}) = 3$,
2. $H(\boldsymbol{Y}\,|\,N) = 1$ (et interpréter),
3. $I(\boldsymbol{Y}\,;N) = 2$.

Exercice 4. ($\star\star\star$) Déplacement du cavalier.

Dans cet exercice, on pourra s'aider d'un logiciel de calcul formel pour effectuer les opérations matricielles demandées.

L'exercice a pour but d'analyser le processus stochastique issu du déplacement d'un cavalier sur un échiquier.

Aux échecs, le cavalier se déplace suivant un « L » : s'il se trouve sur une case donnée, sa future case se situera deux cases plus loin suivant une direction (horizontale ou verticale, les deux sens étant possibles) et une case plus loin suivant l'autre direction. Dans la figure ci-contre, on voit tous les déplacements possibles d'un cavalier situé sur la case d4.



Pour simplifier l'étude, on suppose maintenant que l'échiquier est de taille (3×3). À l'instant initial $n = 0$, le cavalier est situé sur l'une des cases du bord. À chaque pas de temps, le cavalier se déplace sur une nouvelle case, en choisissant la nouvelle case de manière uniforme parmi toutes les cases sur lequelles son déplacement en « L » l'autorise à aller.

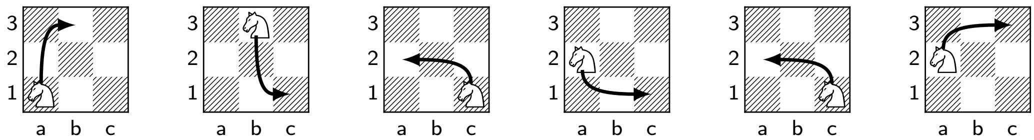


FIGURE 1 – Illustration d'une suite de déplacements du cavalier sur un échiquier de taille (3×3).

Question 1.– Si le cavalier commence par l'une des cases du bord (a1, a2, a3, b1, b3, c1, c2, c3), toutes les cases de l'échiquier (3×3) lui sont-elles accessibles (après un nombre de déplacements indéfini) ?

Dorénavant, on décrit les cases de l'échiquier de la manière suivante :

6	5	4
7		3
0	1	2

Question 2.– Décrire le déplacement du cavalier en termes d'opérations dans le groupe additif $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$.

Sous ce formalisme, on note X_n la variable décrivant la position du cavalier à l'étape n, pour $n \geq 0$. Ainsi, X_n est à valeurs dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. On note enfin $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\geq 0}$ le processus stochastique associé.

Question 3.– Le processus stochastique $\boldsymbol{X}$ est-il markovien ? Est-il homogène ?

Question 4.– Écrire une matrice de transition pour le processus $\boldsymbol{X}$, c'est-à-dire une matrice $\boldsymbol{M}$ de taille (8×8) telle que si $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_8)^\top$ est la distribution de probabilité de X_n, alors $\boldsymbol{Mp}$ est la distribution de probabilité de X_{n+1}.

Question 5.– Sous quelle condition le processus $\boldsymbol{X}$ est-il stationnaire ? Dans ce cas, calculer le taux d'entropie du processus.

On définit maintenant une matrice $\boldsymbol{J}$ de taille (8×8) comme :

$$\boldsymbol{J} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Question 6.– Calculer $\boldsymbol{J}^i$ pour $i = 2, \ldots, 7$, et vérifier que $\boldsymbol{J}^8$ est égale à la matrice identité $\boldsymbol{I}$. En déduire une écriture de $\boldsymbol{M}$ en fonction de $\boldsymbol{J}$.

Question 7.– Démontrer que le polynôme minimal (polynôme unitaire annulateur de plus petit degré) de $\boldsymbol{M}$ est $P(X) = X^5 - \frac{3}{2}X^3 + \frac{1}{2}X$. Pour cela, on pourra calculer les puissances successives de $\boldsymbol{M}$ en fonction de $\boldsymbol{J}$.

Question 8.– En déduire les valeurs propres de $\boldsymbol{M}$, puis la forme de $\boldsymbol{M}^n$ pour $n \geq 0$.

Question 9.– En déduire $\lim_{n\to\infty} p(X_{2n} = i)$ et $\lim_{n\to\infty} p(X_{2n+1} = i)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Commenter.