Université Paris 8 Année 2022–2023

M1 Mathématiques et applications, parcours ACC

Théorie de l'information – Solutions feuille de TD 7

16/11/2022

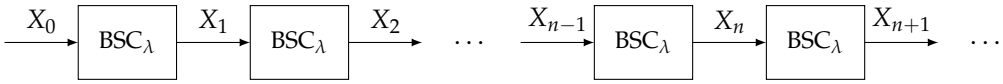
Retrouvez le sujet du TD et d'autres exercices à l'adresse :

`www.math.univ-paris13.fr/~lavauzelle/teaching/2022-23/theorie-information.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin 💻 sur machine

Exercice 1. ($\star$) Concaténation infinie de canaux.

On considère une concaténation infinie de canaux binaires symétriques de même paramètre $\lambda \in]0,1[$. On note $X_0 = X$ et X_n la sortie du n-ème canal.



Question 1.– Rappeler la matrice de transition $\boldsymbol{P}$ du canal binaire symétrique BSC_λ ainsi que sa capacité.

Question 2.– Calculer $\boldsymbol{P}^n$ pour tout $n \geq 0$.

Question 3.– Peut-on modéliser la concaténation de n canaux binaires symétriques comme un seul canal binaire symétrique ? Si oui, en donner le paramètre λ_n.

Question 4.– Que vaut la limite de la capacité du canal concaténé, lorsque $n \to \infty$? Interpréter.

Question 5.– Soit $\boldsymbol{X} = (X_0, \dots, X_n, \dots)$ le processus stochastique associé aux entrées/sorties des canaux. Le processus $\boldsymbol{X}$ est-il markovien ? Si oui, est-il homogène ?

Question 6.– Sous quelle condition sur X_0 le processus $\boldsymbol{X}$ est-il stationnaire ?

Question 7.– Dans le cas où $\boldsymbol{X}$ est stationnaire, calculer le taux d'entropie du processus.

Solutions de l'Exercice 1.

Solution Q1. La matrice de transition du canal binaire symétrique est

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

La capacité du canal est alors $1 - h(\lambda)$.

Solution Q2. La matrice $\boldsymbol{P}$ est diagonalisable (car symétrique réelle), et de valeurs propres 1 et $1-2\lambda$. Une base de vecteurs propres associée est

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On a donc $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2\lambda \end{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1}$ où

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puis,

$$\boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-2\lambda)^n \end{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1+u_n}{2} & \frac{1-u_n}{2} \\ \frac{1-u_n}{2} & \frac{1+u_n}{2} \end{pmatrix},$$

où l'on pose $u_n := (1-2\lambda)^n$ pour tout $n \geq 0$.

Solution Q3. La matrice $\boldsymbol{P}^n$ représente la transition entre X_0 et X_n. On observe que c'est la matrice d'un canal binaire symétrique de paramètre $\lambda_n = \frac{1}{2}(1-(1-2\lambda)^n)$.

Solution Q4. Comme $\lambda \notin \{0,1\}$, on a $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \frac{1}{2}$. Ainsi, la capacité asymptotique du canal est $1 - h(\frac{1}{2}) = 0$. Informellement, cela signifie que la totalité de l'information contenue dans la source X_0 se dissipe peu à peu dans le canal.

Solution Q5. La valeur de X_n ne dépend que de celle de X_{n-1} et de l'aléa introduit par le canal. On a donc :

$$\mathbb{P}\left(X_n = x_n \,|\, (X_{n-1}, \ldots, X_0) = (x_{n-1}, \ldots, x_0)\right) = \mathbb{P}\left(X_n = x_n \,|\, X_{n-1} = x_{n-1}\right).$$

Autrement dit, le processus $\boldsymbol{X}$ est markovien. Il est homogène car les canaux sont identiques :

$$\mathbb{P}\left(X_n = x_n \,|\, X_{n-1} = x_{n-1}\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = x_1 \,|\, X_0 = x_0\right), \quad \forall n \geq 1.$$

Solution Q6. D'après le cours, un processus markovien est stationnaire si et seulement si la distribution $\boldsymbol{a}$ de X_0 satisfait

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}.$$

Cela correspond donc à prendre $\boldsymbol{a}$ dans le sous-espace propre associé à la valeur propre 1, ce qu'on a calculé précédemment (question 2). On obtient

$$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et comme la somme des coordonnées de $\boldsymbol{a}$ doit être 1, $\boldsymbol{a} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$. Autrement dit, X_0 est uniforme.

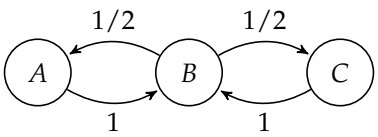
Solution Q7. Lorsque $\boldsymbol{X}$ est stationnaire et markovien, son taux d'entropie est

$$H(\boldsymbol{X}) = H(X_1 \,|\, X_0).$$

Un calcul simple mène à $H(X_1 \,|\, X_0) = h(\lambda)$.

Exercice 2. ($\star$) Marche aléatoire sur le graphe chaîne.

On considère une marche aléatoire sur le graphe suivant :



Les arêtes sortantes d'un sommet $V \in \{A, B, C\}$ sont étiquetées par la probabilité de transition de V vers le sommet cible. Par exemple, la probabilité de B vers A est $1/2$.

On note X_n la position (sommet A, B, ou C) à l'instant n, et on considère le processus stochastique $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Question 1.– Le processus $\boldsymbol{X}$ est-il sans mémoire ? Est-il markovien ? Est-il homogène ? Justifier rapidement.

Question 2.– Donner la matrice de transition du processus $\boldsymbol{X}$.

Question 3.– Sous quelle condition le processus $\boldsymbol{X}$ est-il stationnaire ?

Question 4.– Dans le cas où $\boldsymbol{X}$ est stationnaire, déterminer son taux d'entropie.

Question 5.– Dans le cas où X_0 est déterministe égale à A, calculer la loi de X_{2n} et la loi de X_{2n+1}.

Solutions de l'Exercice 2.

Solution Q1. Le processus $\boldsymbol{X}$ n'est pas sans mémoire car X_1 dépend de X_0, par exemple.

Le processus est markovien car pour tout $n \geq 1$, la valeur de X_n ne dépend que de celle de X_{n-1} et de la transition entre ces deux états.

Enfin, le processus est homogène car les probabilités de transition ne dépendent pas de l'instant n auquel on les considère.

Solution Q2. La matrice de transition est

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution Q3. On a vu que le processus $\boldsymbol{X}$ est markoien et homogène. D'après un résultat du cours, le processus $\boldsymbol{X}$ est donc stationnaire si et seulement si la distribution $\boldsymbol{v}$ de X_0 satisfait $\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$. Résolvons cette équation.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = c \\ b = a + c \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Comme $\boldsymbol{v}$ est une distribution il faut que la somme de ses coordonnées soit égale à 1. Ceci implique que $\alpha = 1/2$ puis

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

Solution Q4. Pour un processus $\boldsymbol{X}$ stationnaire, markovien et homogène, on a

$$H(\boldsymbol{X}) = H(X_1 \,|\, X_0)$$

Dans notre cas, on observe que

$$\begin{aligned} &H(X_1 \,|\, X_0 = A) = 0 \quad \text{car } X_0 = A \implies X_1 = B \\ &H(X_1 \,|\, X_0 = C) = 0 \quad \text{car } X_0 = C \implies X_1 = B \\ &H(X_1 \,|\, X_0 = B) = h(1/2) = 1 \quad \text{car } X_0 = B \implies X_1 = A \text{ avec probabilité } 1/2 \text{ et } X_1 = C \text{ avec probabilité } 1/2 \end{aligned}$$

Par ailleurs (voir question précédénte), la variable initiale X_0 a pour distribution

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc :

$$H(X_1 \,|\, X_0) = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{1}{2}.$$

Solution Q5. Notons $\boldsymbol{v}_n$ la distribution de X_n pour $n \geq 0$. D'après l'énoncé, la distribution de X_0 est

$$\boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On observe ensuite que

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer X_{2n}, on peut chercher à déterminer une relation entre les distributions de X_2, X_4, X_6, etc. Par exemple, on a $\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{P}^2\boldsymbol{v}_2$. On est donc amené à calculer $\boldsymbol{P}^2$:

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Puis, on observe que

$$v_4 = P^2 v_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = v_2 \,,$$

et par induction,

$$v_{2n} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 1 \,.$$

Pour déterminer X_{2n+1}, on raisonne de manière analogue. On a

$$v_3 = P^2 v_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 \,,$$

et par conséquent, en raisonnant par induction on obtient

$$v_{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 0 \,.$$

Exercice 3. ($\star\star$) Modèle de diffusion d'Ehrenfest.

On considère un ensemble de m boules, numérotées de 1 à m, placées de manière arbitraire dans deux urnes A et B. À chaque pas de temps $n \geq 1$, on choisit aléatoirement et uniformément une des boules et on la change d'urne. On représente par X_n le nombre de boules à l'instant $n \geq 0$. On note $\boldsymbol{X} = (X_0, \ldots, X_n)$ le processus stochastique ainsi créé.

Question 1.– Quel est l'ensemble $\mathcal{X}$ des valeurs possiblement prises par X_n ?

Question 2.– Démontrer que $\boldsymbol{X}$ est un processus markovien homogène. On donnera également sa matrice de transition.

Question 3.– Déterminer une loi invariante de $\boldsymbol{X}$.

Solutions de l'Exercice 3.

Solution Q1. On a $\mathcal{X} = \{0, \ldots, n\}$.

Solution Q2. Il est clair que l'état de l'urne A à l'instant n de dépend que de son état à l'instant précédent et du déplacement de boule à l'instant n. Donc $\boldsymbol{X}$ est un processus markovien. Comme les probabilités de transition ne dépendent du temps, il est également homogène.

Si l'urne A contient i boules à l'instant n, alors la probabilité qu'une de ses boules soit tirée aléatoirement pour être déplacée à l'instant suivant est $\frac{i}{m}$. Dans ce cas, A perd une boule ; dans le cas contraire, A va recevoir une boule provenant de l'urne B. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \begin{cases} \frac{i}{m} & \text{si } j = i-1, \\ \frac{m-i}{m} & \text{si } j = i+1, \\ & \text{sinon.} \end{cases}$$

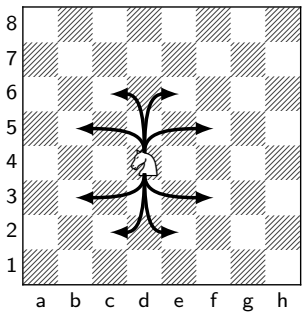
Solution Q3. à faire

Exercice 4. ($\star\star\star$) Déplacement du cavalier.

Dans cet exercice, on pourra s'aider d'un logiciel de calcul formel pour effectuer les opérations matricielles demandées.

L'exercice a pour but d'analyser le processus stochastique issu du déplacement d'un cavalier sur un échiquier.

Aux échecs, le cavalier se déplace suivant un « L » : s'il se trouve sur une case donnée, sa future case se situera deux cases plus loin suivant une direction (horizontale ou verticale, les deux sens étant possibles) et une case plus loin suivant l'autre direction. Dans la figure ci-contre, on voit tous les déplacements possibles d'un cavalier situé sur la case d4.



Pour simplifier l'étude, on suppose maintenant que l'échiquier est de taille (3×3). À l'instant initial $n = 0$, le cavalier est situé sur l'une des cases du bord. À chaque pas de temps, le cavalier se déplace sur une nouvelle case, en choisissant la nouvelle case de manière uniforme parmi toutes les cases sur lequelles son déplacement en « L » l'autorise à aller.

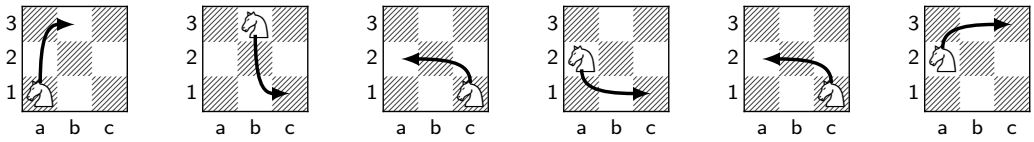


FIGURE 1 – Illustration d'une suite de déplacements du cavalier sur un échiquier de taille (3×3).

Question 1.– Si le cavalier commence par l'une des cases du bord (a1, a2, a3, b1, b3, c1, c2, c3), toutes les cases de l'échiquier (3×3) lui sont-elles accessibles (après un nombre de déplacements indéfini) ?

Dorénavant, on décrit les cases de l'échiquier de la manière suivante :

6	5	4
7		3
0	1	2

Question 2.– Décrire le déplacement du cavalier en termes d'opérations dans le groupe additif $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$.

Sous ce formalisme, on note X_n la variable décrivant la position du cavalier à l'étape n, pour $n \geq 0$. Ainsi, X_n est à valeurs dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. On note enfin $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n \geq 0}$ le processus stochastique associé.

Question 3.– Le processus stochastique $\boldsymbol{X}$ est-il markovien ? Est-il homogène ?

Question 4.– Écrire une matrice de transition pour le processus $\boldsymbol{X}$, c'est-à-dire une matrice $\boldsymbol{M}$ de taille (8×8) telle que si $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_8)^\top$ est la distribution de probabilité de X_n, alors $\boldsymbol{M}\boldsymbol{p}$ est la distribution de probabilité de X_{n+1}.

Question 5.– Sous quelle condition le processus $\boldsymbol{X}$ est-il stationnaire ? Dans ce cas, calculer le taux d'entropie du processus.

On définit maintenant une matrice $\boldsymbol{J}$ de taille (8×8) comme :

$$\boldsymbol{J} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Question 6.– Calculer $\boldsymbol{J}^i$ pour $i = 2, \ldots, 7$, et vérifier que $\boldsymbol{J}^8$ est égale à la matrice identité $\boldsymbol{I}$. En déduire une écriture de $\boldsymbol{M}$ en fonction de $\boldsymbol{J}$.

Question 7.– Démontrer que le polynôme minimal (polynôme unitaire annulateur de plus petit degré) de $\boldsymbol{M}$ est $P(X) = X^5 - \frac{3}{2}X^3 + \frac{1}{2}X$. Pour cela, on pourra calculer les puissances successives de $\boldsymbol{M}$ en fonction de $\boldsymbol{J}$.

Question 8.– En déduire les valeurs propres de $\boldsymbol{M}$, puis la forme de $\boldsymbol{M}^n$ pour $n \geq 0$.

Question 9.– En déduire $\lim_{n\to\infty} p(X_{2n} = i)$ et $\lim_{n\to\infty} p(X_{2n+1} = i)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Commenter.

Solutions de l'Exercice 4.

Solution Q1. Non, on peut s'apercevoir que la case centrale b2 est inaccessible pour le cavalier. En revanche, toutes les autres cases le sont (en moins de 4 coups).

Solution Q2. Si $x \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ représente la position du cavalier, il peut alors se déplacer sur les cases $x+3$ et $x+5 = x-3$.

Solution Q3. On a $X_n = X_{n-1} + 3 \times (-1)^{B_n}$ où B_n est uniforme dans $\{0,1\}$. Le processus $\boldsymbol{X}$ est donc markovien. Il est également homogène : peu importe l'instant n, la loi de probabilités de la transition $X_{n-1} \to X_n$ est la même.

Solution Q4. On a

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution Q5. Le processus est stationnaire si la distribution $\boldsymbol{a}$ de X_0 satisfait

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\,.$$

L'espace des solutions $\boldsymbol{a}$ de ce système linéaire est $\mathbb{R}\,(1,1,1,1,1,1,1,1)^\top$. Comme $\boldsymbol{a}$ doit être une distribution de probabilité, il faut que la somme de ses entrées soit égale à 1. Ceci implique que

$$\boldsymbol{a} = (1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8)^\top\,.$$

Ensuite, le taux d'entropie du processus (markovien et stattionnaire) est donné par

$$H(\boldsymbol{X}) = H(X_1 \,|\, X_0)$$

Ici, notons que pour toute position initiale x_0 du cavalier, on a $H(X_1 \,|\, X_0 = x_0) = 1$ car la variable X_1 conditionnée à $X_0 = x_0$ est binaire et uniforme. Par conséquent :

$$H(\boldsymbol{X}) = H(X_1 \,|\, X_0) = \sum_{x_0=1}^{8} \mathbb{P}(X_0 = x_0) H(X_1 \,|\, X_0 = x_0) = 1\,.$$

Solution Q6. La matrice $\boldsymbol{J}^i$ peut être décrite comme l'empilement des permutations cycliques du vecteur ligne $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, où le 1 est situé en position $i+1 \mod 8$. On a donc bien $\boldsymbol{J}^8 = \boldsymbol{I}$, et on peut écrire

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J}^3 + \boldsymbol{J}^5) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J}^3 + \boldsymbol{J}^{-3})\,.$$

Solution Q7. Utilisons la forme $\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J}^3 + \boldsymbol{J}^{-3})$ pour faire les calculs, et rappelons-nous que $\boldsymbol{J}^8 = \boldsymbol{I}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}^2 &= \frac{1}{4}(\boldsymbol{J}^6 + 2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J}^{-6}) = \frac{1}{4}(\boldsymbol{J}^2 + 2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J}^{-2}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{I}\,,\\
\boldsymbol{M}^3 &= \frac{1}{8}(\boldsymbol{J}^9 + 3\boldsymbol{J}^3 + 3\boldsymbol{J}^{-3} + \boldsymbol{J}^{-9}) = \frac{1}{8}(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}^{-1}) + \frac{3}{8}(\boldsymbol{J}^3 + \boldsymbol{J}^{-3})\,,\\
\boldsymbol{M}^4 &= \frac{1}{16}(\boldsymbol{J}^{12} + 4\boldsymbol{J}^6 + 6\boldsymbol{I} + 4\boldsymbol{J}^{-6} + \boldsymbol{J}^{-12}) = \frac{1}{4}(\boldsymbol{J}^2 + \boldsymbol{J}^{-2}) + \frac{1}{16}(\boldsymbol{J}^4 + \boldsymbol{J}^{-4}) + \frac{3}{8}\boldsymbol{I}\,,\\
\boldsymbol{M}^5 &= \frac{1}{32}(\boldsymbol{J}^{15} + 5\boldsymbol{J}^9 + 10\boldsymbol{J}^3 + 10\boldsymbol{J}^{-3} + 5\boldsymbol{J}^{-9} + \boldsymbol{J}^{-15}) = \frac{3}{16}(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}^{-1}) + \frac{5}{16}(\boldsymbol{J}^3 + \boldsymbol{J}^{-3})\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, on remarque que $\boldsymbol{M}^5 - \frac{3}{2}\boldsymbol{M}^3 + \frac{1}{2}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$, et que toute combinaison linéaire de $\boldsymbol{M}^4$, $\boldsymbol{M}^3$, $\boldsymbol{M}^2$, $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{I}$ ne peut pas s'annuler. Ainsi, $P(X) = X^5 - \frac{3}{2}X^3 + \frac{1}{2}X$ est le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule $\boldsymbol{M}$.

Solution Q8. On sait que les valeurs propres de $\boldsymbol{M}$ sont racines de son polynôme minimal. Factorisons $P(X)$. Les réels 0, 1 et -1 sont des racines évidentes de P. Puis, $P(X) = X(X-1)(X+1)(X^2 - \frac{1}{2})$. Donc, les valeurs propres de $\boldsymbol{M}$ sont

$$\left\{1, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right\}.$$

Les multiplicités des valeurs propres sont alors $(1, 1, 2, 2, 2)$.

Comme $\boldsymbol{M}$ est symétrique réelle, elle est diagonisable, et se diagonalise comme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour être le plus complet possible, on peut donner une base de chaque sous-espace propre :

- **Valeur propre** 1 : $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^\top$
- **Valeur propre** -1 : $(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1)^\top$
- **Valeur propre** $\sqrt{2}/2$: $(1, 0, -1, \sqrt{2}, -1, 0, 1, -\sqrt{2})^\top$ et $(0, 1, -\sqrt{2}, 1, 0, -1, \sqrt{2}, -1)^\top$
- **Valeur propre** $-\sqrt{2}/2$: $(1, 0, -1, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2})^\top$ et $(0, 1, \sqrt{2}, 1, 0, -1, -\sqrt{2}, -1)^\top$
- **Valeur propre** 0 : $(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0)^\top$ et $(0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1)^\top$

et construire la matrice de passage en fonction.

La matrice $\boldsymbol{M}^n$ est alors diagonaible sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{\sqrt{2}}{2})^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-\frac{\sqrt{2}}{2})^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{\sqrt{2}}{2})^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{\sqrt{2}}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution Q9. à terminer