Université Paris 8 Année 2022–2023

M1 Mathématiques et applications, parcours ACC

Théorie de l'information – Solutions feuille de TD 8

23/11/2022

Retrouvez le sujet du TD et d'autres exercices à l'adresse :

`www.math.univ-paris13.fr/∼lavauzelle/teaching/2022-23/theorie-information.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin 💻 sur machine

Exercice 1. 💻 ($\star\star$) Implantation de l'algorithme LZW.

Question 1.– Implanter l'algorithme de codage LZW vu dans le cours. L'algorithme prendra en entrée le message à coder, ainsi que l'alphabet de la source.

(si besoin, on pourra commencer par supposer que l'alphabet est $\{0,1\}$)

Question 2.– Tester l'algorithme sur les instances et exemples présentés en cours.

Question 3.– Implanter une source $\boldsymbol{X}$ sans mémoire sur $\mathcal{X} = \{0,1\}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p(X_n = 1) = 0.1$. Puis, calculer la longueur moyenne du codage d'une suite N bits par LZW (avec N grand), et comparer avec $\overline{H}(\boldsymbol{X})$.

Question 4.– Implanter une source binaire $\boldsymbol{X}$ markovienne (pas nécessairement stationnaire) de son choix. Puis, calculer la longueur moyenne du codage d'une suite N bits par LZW (avec N grand), et comparer avec $\overline{H}(\boldsymbol{X})$.

Solutions de l'Exercice 1.

Voir scripts.

Exercice 2. ($\star\star$) Entropie et codage par plage.

Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_N)$ une séquence **finie** de $N \geq 1$ variables aléatoires binaires. On définit $\boldsymbol{R} = (R_1 \dots, R_M)$, où les variables R_m sont à valeurs sur $\mathbb{N}^+$, comme la séquence des longueurs de plages de symboles identiques dans $\boldsymbol{X}$. Notons que $M \leq N$, et que la valeur de M dépend de la réalisation des X_n. Par exemple, si $N = 13$ et si $\boldsymbol{X}$ se réalise comme (1100010000111), alors la variable $\boldsymbol{R}$ vaut $(2,3,1,4,3)$ et $M = 5$.

On note $H(\boldsymbol{X})$ l'entropie de la variable conjointe des $(X_1, \dots, X_N)$. De même, $H(\boldsymbol{R})$ est l'entropie de la variable conjointe des $(R_1, \dots, R_M)$.

Question 1.– Démontrer que $H(\boldsymbol{R}, X_1) = H(\boldsymbol{X})$.

Question 2.– En déduire que $H(\boldsymbol{X}) - H(X_1) \leq H(\boldsymbol{R}) \leq H(\boldsymbol{X})$.

Solutions de l'Exercice 2.

Solution Q1. Par définition, les variables $\boldsymbol{R}$ et X_1 sont construites de manière déterministe en fonction de $\boldsymbol{X}$. Autrement dit, il existe une fonction déterministe g telle que $g(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{R}, X_1)$: cette fonction correspond exactement à calculer les entiers et la première lettre du codage RLE (codage par plage). D'après le principe de non-création d'information, on a donc

$$H(\boldsymbol{R}, X_1) = H(g(\boldsymbol{X})) \leq H(\boldsymbol{X})$$

Inversement, soit

$$f : (r_1, \dots, r_m, x_1) \mapsto (\underbrace{x_1 \dots x_1}_{r_1 \text{ fois}} \underbrace{\overline{x_1} \dots \overline{x_1}}_{r_2 \text{ fois}} \underbrace{x_1 \dots x_1}_{r_3 \text{ fois}} \dots\dots)$$

où $\overline{x_1} = 1 - x_1$, c'est-à-dire $\overline{x_1} = 0$ si $x_1 = 1$, et inversement. On observe que $f(\boldsymbol{R}, X_1) = \boldsymbol{X}$. Ainsi, par le même principe de non-création d'information, on a $H(\boldsymbol{X}) \leq H(\boldsymbol{R}, X_1)$. On en déduit :

$$H(\boldsymbol{R}, X_1) = H(\boldsymbol{X}) .$$

Solution Q2. On utilise les formules du cours sur l'encadrement de l'entropie conjointe. D'une part :

$$H(\boldsymbol{R}) \leq H(\boldsymbol{R}, X_1) = H(\boldsymbol{X}) .$$

D'autre part :

$$H(\boldsymbol{X}) = H(\boldsymbol{R}, X_1) \leq H(\boldsymbol{R}) + H(X_1) .$$

Exercice 3. ($\star\star$) Longueurs de plages.

Soit $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n \geq 1}$ un processus stochastique sans mémoire, dont les variables X_n sont binaires et uniformes. On note N la variable aléatoire comptant la longueur de la première plage de symboles identiques, c'est-à-dire telle que

$$X_{N+1} \neq X_N \quad \text{et} \quad \forall 2 \leq n \leq N,\, X_n = X_{n-1} .$$

On note enfin $\boldsymbol{Y} := (X_1, \dots, X_N)$.

Question 1.– Déterminer le domaine des valeurs prises par les variables N et $\boldsymbol{Y}$?

Question 2.– Déterminer la loi de N, la loi de $\boldsymbol{Y}$ conditionnée à N puis en déduire la loi de $\boldsymbol{Y}$.

Question 3.– Démontrer que :

1. $H(\boldsymbol{Y}) = 3$,
2. $H(\boldsymbol{Y} \,|\, N) = 1$ (et interpréter),
3. $I(\boldsymbol{Y}\,; N) = 2$.

Solutions de l'Exercice 3.

Solution Q1. La variable N prend les valeurs $n \in \mathbb{N}^+$. La variable $\boldsymbol{Y}$, quant à elle, peut prendre les valeurs $\underbrace{0 \dots 0}_{n \text{ fois}}$ et $\underbrace{1 \dots 1}_{n \text{ fois}}$ pour n'importe quel $n \geq 1$.

Solution Q2.

— **Loi de** N. Pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mathbb{P}(N = n) = \sum_{c \in \{0,1\}} \mathbb{P}(X_1 = c \text{ et } \cdots \text{ et } X_n = c \text{ et } X_{n+1} = 1 - c) = 2 \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} .$$

— **Loi de** $\boldsymbol{Y}$ **conditionnée à** N. Pour $c \in \{0,1\}$ et $\ell \geq 1$ on note $\boldsymbol{c}^{(\ell)} := \underbrace{c \cdots c}_{\ell \text{ fois}}$. On a alors

$$\mathbb{P}(Y = \boldsymbol{c}^{(\ell)} \mid N = \ell) = \frac{1}{2}$$

car si $N = \ell$, les deux seuls valeurs pour $\boldsymbol{Y}$ sont $\boldsymbol{c}^{(\ell)}$ et son complément $\overline{\boldsymbol{c}^{(\ell)}}$, et ces évènements sont équiprobables.

— **Loi de** $\boldsymbol{Y}$. Enfin, pour tout $c \in \{0,1\}$ et tout $\ell \geq 1$, on a :

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{c}^{(\ell)}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{c}^{(\ell)} \mid N = i)\mathbb{P}(N = i) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^\ell} = \frac{1}{2^{\ell+1}} .$$

Solution Q3. On utilise les résultats de la Question 2.

1. D'abord,
$$H(\boldsymbol{Y}) = -\sum_{c\in\{0,1\}}\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{c}^{(n)})\log_2\mathbb{P}(\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{c}^{(n)}) = 2\sum_{n\geq 1}\frac{n+1}{2^{n+1}}\,.$$
On rappelle que la série $\sum_{n\geq 0} n\gamma^n$ converge vers $\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}$.Pour $\gamma = \frac{1}{2}$, on obtient donc :
$$H(\boldsymbol{Y}) = 2\cdot\left(\frac{1/2}{(1-1/2)^2} - \frac{1}{2}\right) = 3\,.$$
2. La loi de $\boldsymbol{Y}$ conditionnée à N est connue. On peut donc l'utiliser ici :
$$H(\boldsymbol{Y}\mid N) = \sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(N=n)H(\boldsymbol{Y}\mid N=n) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}\times h(1/2) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n} = 1\,.$$
Interprétation : lorsque N est connu, il ne reste qu'un bit d'indétermination : la valeur prise par la plage de symboles identiques.
3. On utilise la formule bien connue du cours :
$$I(\boldsymbol{Y};N) = H(\boldsymbol{Y}) - H(\boldsymbol{Y}\mid N) = 3-1 = 2\,.$$
