Université Paris 8 Année 2022–2023

M1 Mathématiques et applications, parcours ACC

Théorie de l'information – Feuille de TD 5

19/10/2022

Le corrigé de certains exercices sera disponible à l'adresse suivante :

`www.math.univ-paris13.fr/~lavauzelle/teaching/2022-23/theorie-information.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin 💻 sur machine

Exercice 1. 💻 ($\star\star$) Implantation de l'algorithme de Huffman.

Question 1.– Implanter l'algorithme de Huffman.

Question 2.– Tester votre implantation avec :

— l'exemple du cours :
$$p = (0.3, 0.25, 0.12, 0.10, 0.10, 0.08, 0.05)$$

— une distribution uniforme :
$$p = \left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}\right)$$

— une distribution de type géométrique tronquée :
$$p = \left(1-\gamma, (1-\gamma)\gamma, (1-\gamma)\gamma^2, \ldots, (1-\gamma)\gamma^{n-2}, (1-\gamma)\gamma^{n-2}\right)$$

Exercice 2. ($\star\star$) Capacité du canal à effacement.

Le but de cet exercice est de calculer la capacité du canal à effacement d'entrée binaire $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ et de paramètre λ. On rappelle que ce canal est donné par la matrice de transition
$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ \lambda & \lambda \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

On note X l'entrée du canal et Y sa sortie. On désigne par $\perp$ le symbole d'effacement.

Question 1.– Exprimer $H(Y \mid X)$ en fonction de λ.

Question 2.– L'entrée du canal est une variable aléatoire X binaire, dont on note la probabilité $p_X(0) = \alpha$. Démontrer que
$$H(Y) = (1-\lambda)h(\alpha) + h(\lambda)\,.$$

Question 3.– En déduire que la capacité du canal à effacement est $1 - \lambda$.

Exercice 3. $(\star)$ Concaténation de 2 canaux binaires symétriques.

Considérons deux canaux binaires symétriques C_1 et C_2 de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. L'entrée de C_1 est notée X, et on suppose que la sortie Y de C_1 est reliée à l'entrée de C_2. Enfin, on note Z la sortie de C_2. On note C le canal issu de la concaténation de C_1 et C_2.

Question 1.– Décrire la loi conditionnelle $Z \mid X$, ou de manière équivalente, calculer la matrice de transition de C.

Question 2.– Le canal C est-il équivalent à un canal binaire symétrique ?

Exercice 4. $(\star\star)$ Canal q-aire symétrique.

Dans certains modèles de communication, notamment pour la cryptographie, il est commode de considérer comme alphabet des corps ayant un nombre fini $q \neq 2$ d'élements. On considère donc un canal dont les entrées et sorties sont à valeurs dans $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_q\}$, et qui admet comme une matrice de transition

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{\lambda}{q-1} & \cdots & \cdots & \frac{\lambda}{q-1} \\ \frac{\lambda}{q-1} & 1-\lambda & \frac{\lambda}{q-1} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{\lambda}{q-1} \\ \frac{\lambda}{q-1} & \cdots & \cdots & \frac{\lambda}{q-1} & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, un symbole $x_i \in \mathcal{X}$ est preservé avec probabilité $1-\lambda$. Il est donc modifié avec probabilité λ, et ce de manière équiprobable sur les autres symboles de la sortie.

Question 1.– Calculer la capacité du canal, et commenter.