Université Paris 8 Année 2021–2022

M1 Mathématiques et applications, parcours ACC et CSSD

Théorie de l'information
Interrogation à mi-parcours – solutions

18/11/2021

Exercice 1. Questions autour de l'entropie (4 points).

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$. Répondre aux questions suivantes par vrai ou faux, en apportant une justification de quelques lignes.

Question 1.– On a toujours $H(X) = H(2X)$.

Question 2.– On a toujours $H(X) = H(X^2)$.

Question 3.– Si X prend 8 valeurs distinctes et est uniforme, alors $H(X) = 3$.

Question 4.– Si $H(X) = 3$, alors X prend 8 valeurs distinctes et est uniforme.

Solutions de l'Exercice 1.

Solution Q1. C'est vrai. En effet, $H(2X) \leq H(X)$ par le principe de non-création d'information ($x \mapsto 2x$ est une application déterministe). D'autre part, $H(X) = H(\frac{1}{2}2X) \leq H(2X)$ pour la même raison.

Solution Q2. C'est faux. Contre-exemple : pour X uniforme sur $\{-1, 1\}$, on a $H(X) = 1$ et $H(X^2) = 0$ car X^2 est déterministe, constante égale à 1.

Solution Q3. C'est vrai. D'après le cours, pour une variable uniforme on a $H(X) = \log_2(|\mathcal{X}|) = \log_2(8) = 3$.

Solution Q4. C'est faux. Par exemple on prend X à valeurs dans un ensemble à 10 éléments, telle que les 8 premières valeurs ont probabilité $p_1 = \cdots = p_8 = 1/16$ et les deux dernières ont probabilité $p_9 = p_{10} = 1/4$ (on vérifie qu'on a bien $\sum_{i=1}^{10} p_i = 1$). Alors l'entropie vaut

$$H(X) = 8 \times \frac{1}{16} \times \log_2(16) + 2 \times \frac{1}{4} \times \log_2(4) = 2 + 1 = 3\,.$$

Exercice 2. Codes de Shannon–Fano et de Huffman (5 points).

Question 1.– Dans un cadre général on considère une source X, et on note C_{SF} son code de Shannon–Fano et C_H son code de Huffman. Rappeler (sans le démontrer) comment se comparent les 3 valeurs suivantes :

- l'entropie $H(X)$ de la source,
- la longueur moyenne $\overline{\ell}(C_{SF})$ du code de Shannon–Fano,
- la longueur moyenne $\overline{\ell}(C_H)$ du code de Huffman.

On passe maintenant à un cas particulier. Dans les deux questions suivantes, on pourra s'aider de la table de logarithmes en base 2 :

x	1	0.5	0.25	0.125	0.0625
$\log_2(x)$	0	-1	-2	-3	-4

On considère X une source de distribution :

$$p_X = (0.09, 0.10, 0.11, 0.15, 0.25, 0.30)\,.$$

Question 2.– Donner un code de Huffman associé à la source X.

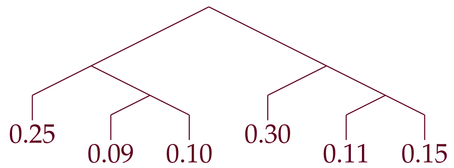
Question 3.– Donner un code de Shannon–Fano associé à la source X.

Solutions de l'Exercice 2.

Solution Q1. On a

$$H(X) \leq \bar{\ell}(C_H) \leq \bar{\ell}(C_{SF}) < H(X) + 1\,.$$

Solution Q2. L'arbre d'un des codes de Huffman que l'on peut obtenir est :



Un code associé est donc par exemple :

$$(010, 011, 110, 111, 00, 10)\,.$$

Solution Q3. Le code de Shannon–Fano est défini en attribuant d'abord les longueurs des mots par la formule $n_i = \lceil \log(1/p_i) \rceil$. D'après la table on obtient donc la séquence de longueurs : $(4, 4, 4, 3, 2, 2)$, que l'on peut coder (par exemple) comme

$$(0000, 0001, 0010, 010, 10, 11)\,.$$

Exercice 3. Codes uniquement décodables (2 points).

Question 1.– Les codes binaires suivants sont-ils uniquement décodables ? Justifier.

1. $(10, 11, 0101, 0000)$,
2. $(1, 110, 01, 010, 00000)$.

Solutions de l'Exercice 3.

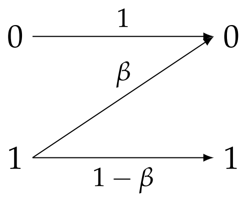
Solution Q1.

1. Le code est uniquement décodable car il est préfixe.
2. Le code n'est pas uniquement décodable car ses longueurs ne vérifient pas l'inégalité de Kraft :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{33}{32} > 1\,.$$

Exercice 4. Un canal (10 points).

Dans cet exercice, on se propose de calculer la capacité d'un canal de transmission. Ce canal est binaire (l'entrée et la sortie ont taille 2), et peut être défini par le diagramme suivant.



On note X et Y les variables aléatoires, toutes deux définies sur $\{0, 1\}$, associées à l'entrée (X) et à la sortie (Y) du canal. On note $\alpha := p(X = 0)$. On rappelle enfin que

$$h(t) := t \log_2\left(\frac{1}{t}\right) + (1-t)\log_2\left(\frac{1}{1-t}\right)$$

est la fonction d'entropie binaire.

Question 1.– Donner la matrice de transition $\boldsymbol{M}$ du canal.

Question 2.– Calculer $H(Y \,|\, X = 0)$. Interpréter le résultat.

Question 3.– Montrer que $H(Y \,|\, X) = (1-\alpha)h(\beta)$.

Question 4.– Calculer $H(Y)$ puis $I(X\,;Y)$.

Question 5.– Calculer la capacité du canal pour $\beta = 0$, puis interpréter le résultat.

Question 6.– Calculer la capacité du canal pour $\beta = 1$, puis interpréter le résultat.

Question 7.– [difficile, 3pts] Pour $\beta \in]0, 1[$ fixé, on pose $f_\beta(x) := h((1-\beta)(1-x)) - (1-x)h(\beta)$ et on note

$$\mu(\beta) := 1 - \frac{1}{(1-\beta)(1+2^{h(\beta)/(1-\beta)})}\,.$$

Démontrer que le minimum de f_β sur $[0, 1]$ est atteint en $x = \mu(\beta)$. En déduire la capacité du canal dans le cas général.

Solutions de l'Exercice 4.

Solution Q1. On a $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1-\beta \end{pmatrix}$.

Solution Q2. Le calcul donne $H(Y \,|\, X = 0) = -1\log 1 - 0 \log 0 = 0$. L'interprétation est la suivante : lorsque $X = 0$, nécessairement $Y = 0$ donc il n'y a aucun aléa dans la sortie.

Solution Q3. Observons que $H(Y \,|\, X = 1) = -\beta \log \beta - (1-\beta)\log(1-\beta) = h(\beta)$. Puis, le calcul donne :

$$H(Y \,|\, X) = p(X = 0)H(Y \,|\, X = 0) + p(X = 1)H(Y \,|\, X = 1) = 0 + (1-\alpha)h(\beta)\,.$$

Solution Q4. On a $p(Y = 0) = \alpha + \beta(1-\alpha)$ et $p(Y = 1) = (1-\alpha)(1-\beta)$. Donc

$$H(Y) = h((1-\alpha)(1-\beta))$$

et

$$I(X\,;Y) = h((1-\beta)(1-\alpha)) - (1-\alpha)h(\beta)\,.$$

Solution Q5. Pour $\beta = 0$, on a $X = Y$. Par conséquent pour tout X, $I(X\,;Y) = I(X\,;X) = H(X)$, qui a pour valeur maximale 1 lorsque X est uniforme. Donc la capacité est 0. Interprétation : pour $\beta = 0$, le canal ne produit pas d'erreur, donc la capacité est maximale.

Solution Q6. Pour $\beta = 1$, on a $Y = 0$. Par conséquent pour tout X, on a $I(X\,;Y) = H(Y) - H(Y \,|\, X) = 0 - 0 = 0$. Donc la capacité est 0. Interprétation : pour $\beta = 1$, le canal produit toujours 0, donc il est impossible de retrouver la valeur de l'entrée à partir de celle de l'entrée. La capacité du canal est donc nulle.

Solution Q7. On calcule $f'(x) = -(1-\beta)h'((1-x)(1-\beta)) + h(\beta)$, et par un calcul simple, on vérifie que la dérivée de la fonction d'entropie binaire est

$$h'(t) = \log_2((1-t)/t)\,.$$

Donc,

$$f'(x) = h(\beta) - (1-\beta)\log_2\left(\frac{1-(1-x)(1-\beta)}{(1-x)(1-\beta)}\right)\,.$$

Ainsi, $f'(x) = 0$ si et seulement si $2^{h(\beta)/(1-\beta)} = \frac{1-(1-x)(1-\beta)}{(1-x)(1-\beta)}$. Ceci équivaut à $x = \mu(\beta)$.

Si l'on pose $u = \frac{1}{1+2^{h(\beta)/(1-\beta)}}$, alors on a $\frac{1-u}{u} = 2^{h(\beta)/(1-\beta)}$. Puis, la capacité est obtenue en évaluant f en $\mu(\beta)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
C = f(\mu(\beta)) &= h(u) - \frac{h(\beta)}{1-\beta}u \\
&= u\log\frac{1}{u} - (1-u)\log(1-u) - \frac{h(\beta)}{1-\beta}u \\
&= u\log\frac{1-u}{u} - \log(1-u) - \frac{h(\beta)}{1-\beta}u \\
&= u\frac{h(\beta)}{1-\beta} + \log\left(\frac{1}{1-u}\right) + \frac{h(\beta)}{1-\beta}u \\
&= \log\left(\frac{1}{1-u}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{2^{h(\beta)/(1-\beta)}}\right)\,.
\end{aligned}$$
