Université Paris 8 — Année 2021–2022

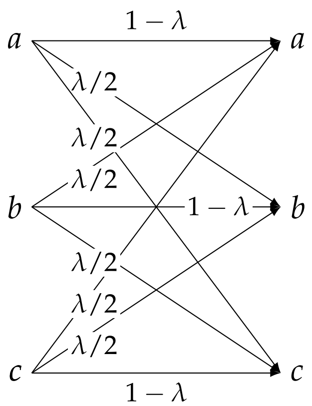
M1 Mathématiques et applications, parcours ACC et CSSD

Théorie de l'information
Interrogation finale – solutions

16/12/2021

Exercice 1. Canal ternaire.

On considère un canal ternaire, c'est-à-dire dont l'entrée X et la sortie Y sont définies sur un alphabet $\{a, b, c\}$ de cardinal 3. Le canal a le diagramme de transition suivant :



Autrement dit, on a :

$$\mathbb{P}(Y = x \,|\, X = x) = 1 - \lambda, \quad \forall x \in \{a, b, c\}$$

et

$$\mathbb{P}(Y = y \,|\, X = x) = \lambda/2, \quad \forall (x,y) \in \{a, b, c\}^2 \text{ tels que } x \neq y\,.$$

On rappelle que $h(t) := -t\log_2(t) - (1-t)\log_2(1-t)$ est la fonction d'entropie binaire.

Question 1.– Donner la matrice de transition du canal.

Question 2.– Démontrer que, pour tout $x \in \{a, b, c\}$, on a $H(Y \mid X = x) = h(\lambda) + \lambda$. En déduire la valeur de $H(Y \,|\, X)$.

Question 3.– Quelle est la valeur maximale que peut atteindre $H(Y)$? Avec quelle source X cette valeur est-elle atteinte ?

Question 4.– Démontrer que la capacité du canal est :

$$C(\lambda) = \log_2(3) - h(\lambda) - \lambda\,.$$

Question 5.– Calculer et intérpréter la capacité du canal lorsque $\lambda = 2/3$.

Question 6.– Calculer et intérpréter la capacité du canal lorsque $\lambda = 0$.

Solutions de l'Exercice 1.

Solution Q1. La matrice est

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda/2 & \lambda/2 \\ \lambda/2 & 1-\lambda & \lambda/2 \\ \lambda/2 & \lambda/2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Solution Q2. Pour $x = a$ (par exemple), on a :

$$H(Y\,|\,X = a) = -2 \times \frac{\lambda}{2} \log_2 \frac{\lambda}{2} - (1-\lambda)\log_2(1-\lambda) = \lambda - \lambda \log_2(\lambda) - (1-\lambda)\log_2(1-\lambda) = \lambda + h(\lambda)$$

Par symétrie on obtient la même valeur pour $H(Y\,|\,X = b)$ et $H(Y\,|\,X = c)$. Par conséquent

$$H(Y\,|\,X) = \sum_{x\in\{a,b,c\}} \mathbb{P}(X = x) H(Y\,|\,X = x) = (h(\lambda) + \lambda) \times \sum_{x\in\{a,b,c\}} \mathbb{P}(X = x) = h(\lambda) + \lambda\,.$$

Solution Q3. La variable aléatoire Y est à valeurs dans $\{a, b, c\}$, donc $H(Y) \leq \log_2(3)$. On atteint cette valeur lorsque Y est uniforme, c'est-à-dire lorsque X est également uniforme.

Solution Q4. La capacité du canal est donnée par :

$$C(\lambda) = \max_X I(X\,;Y) = \max_X (H(Y) - H(Y\,|\,X)) = \max_X H(Y) - h(\lambda) + \lambda = \log_2(3) - (h(\lambda) + \lambda)\,.$$

Solution Q5. Pour $\lambda = 2/3$ on obtient

$$\begin{aligned} C(1/3) &= \log_2(3) - h(2/3) - 2/3 \\ &= \log_2(3) + \frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \\ &= \log_2(3) + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)\log_2\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\log_2(2) - \frac{2}{3} \\ &= \log_2(3) - \log_2(3) + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0\,. \end{aligned}$$

Interprétation : pour $\lambda = 1/3$, la sortie du canal est uniforme peu importe l'entrée. Par conséquent, la canal ne peut transmettre aucune information ; sa capacité est nulle.

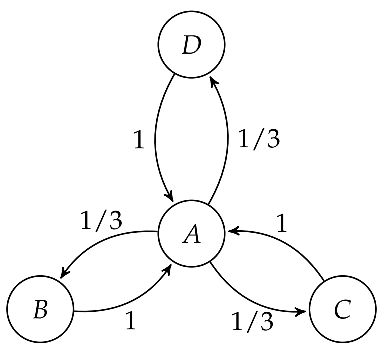
Solution Q6. Pour $\lambda = 0$ on obtient

$$C(0) = \log_2(3) - h(0) - 0 = \log_2(3)\,.$$

Interprétation : pour $\lambda = 0$, il n'y a aucune erreur dans le canal. La capacité est donc maximale et égale à l'entropie maximale d'une source en entrée, c'est-à-dire $\log_2(3)$ (entropie d'une variable de loi uniforme).

<u>Exercice 2. Marche aléatoire sur le graphe étoilé.</u>

On considère une marche aléatoire sur le graphe suivant :



Les arêtes sortantes d'un sommet $V \in \{A, B, C, D\}$ sont étiquetées par la probabilité de transition de V vers le sommet suivant de la marche. Par exemple, la probabilité du déplacement de A vers B est de $1/3$, tandis que celle de B vers A est égale à 1.

On note X_n la position (sommet A, B, C ou D) à l'instant n de la marche aléatoire, et on considère le processus stochastique $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Question 1.– Le processus $\boldsymbol{X}$ est-il sans mémoire ? Est-il markovien ? Est-il homogène ? Justifier rapidement.

Question 2.– Donner la matrice de transition du processus $\boldsymbol{X}$.

Question 3.– Sous quelle condition le processus $\boldsymbol{X}$ est-il stationnaire ?

Question 4.– Dans le cas où $\boldsymbol{X}$ est stationnaire, déterminer son taux d'entropie.

Question 5.– Dans le cas où X_0 est déterministe égale à A, calculer la loi de X_{2n} et la loi de X_{2n+1}.

Solutions de l'Exercice 2.

Solution Q1. Le processus $\boldsymbol{X}$ n'est pas sans mémoire car X_1 dépend de X_0, par exemple.

Le processus est markovien car pour tout $n \geq 1$, la valeur de X_n ne dépend que de celle de X_{n-1} et de la transition entre ces deux états.

Enfin, le processus est homogène car les probabilités de transition ne dépendent pas de l'instant n auquel on les considère.

Solution Q2. La matrice de transition est

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution Q3. On a vu que le processus $\boldsymbol{X}$ est markoien et homogène. D'après un résultat du cours, le processus $\boldsymbol{X}$ est donc stationnaire si et seulement si la distribution $\boldsymbol{v}$ de X_0 satisfait $\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$. Résolvons cette équation.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a = b + c + d \\ b = c = d \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Comme $\boldsymbol{v}$ est une distribution il faut que la somme de ses coordonnées soit égale à 1. Ceci implique que $\alpha = 1/2$ puis

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}.$$

Solution Q4. Pour un processus $\boldsymbol{X}$ stationnaire, markovien et homogène, on a

$$H(\boldsymbol{X}) = H(X_1 \,|\, X_0)$$

Dans notre cas, on observe que

$$\begin{aligned}
H(X_1 \,|\, X_0 = A) = \log_2(3) \quad & \text{car } X_0 = A \implies X_1 \in \{B, C, D\} \text{ avec même probabilité } 1/3 \\
H(X_1 \,|\, X_0 = B) = 0 \quad & \text{car } X_0 = B \implies X_1 = A \\
H(X_1 \,|\, X_0 = C) = 0 \quad & \text{car } X_0 = C \implies X_1 = A \\
H(X_1 \,|\, X_0 = D) = 0 \quad & \text{car } X_0 = D \implies X_1 = A
\end{aligned}$$

Par ailleurs (voir question précédénte), la variable initiale X_0 a pour distribution

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc :

$$H(X_1 \,|\, X_0) = 3 \times \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{2} \times \log_2(3) = \frac{1}{2} \log_2(3).$$

Solution Q5. Notons $\boldsymbol{v}_n$ la distribution de X_n pour $n \geq 0$. D'après l'énoncé, la distribution de X_0 est

$$\boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On observe ensuite que

$$v_1 = \boldsymbol{P} v_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

et

$$v_2 = \boldsymbol{P} v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_0 \,.$$

Ainsi, on en déduit que $v_4 = \boldsymbol{P}^2 v_2 = \boldsymbol{P}^2 v_0 = v_0$ et par induction $v_{2n} = v_0$ pour tout $n \geq 0$.

Ensuite, on a :

$$v_3 = \boldsymbol{P} v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = v_1 \,.$$

et de la même manière, on obtient $v_5 = \boldsymbol{P}^2 v_3 = \boldsymbol{P}^2 v_1 = v_1$ et par induction $v_{2n+1} = v_1$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 3. Questions diverses.

Question 1.– Donner la transformée de Burrows–Wheeler du mot suivant :

`ACACIA`

Question 2.– On considère le code de Liv–Zempel sur un alphabet $\mathcal{X}$ à 4 symboles. Quelle est la longueur minimale, en nombre de bits, de l'encodage d'un mot ayant n symboles de $\mathcal{X}$? Justifiez votre réponse.

Question 3.– On considère une source X sur $\{a, b, c, d, e\}$ de loi suivante :

x	a	b	c	d	e
$p_X(x)$	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	$1/16$

Quelle est la plus petite longueur moyenne d'un code uniquement décodable sur X ? Justifier.

Question 4.– Le code $\{1, 101\}$ est-il uniquement décodable ? Justifier.

Question 5.– Quelle est la longueur moyenne du code de Shannon–Fano sur une source X dont la distribution de probablité est :

$$p_X = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32} \right) \ ?$$

Question 6.– Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. On note Y la variable aléatoire représentant le signe (positif ou négatif) de X.

1. Pourquoi a-t-on $H(Y) \leq 1$?
2. En déduire que $I(X\,; X^2) \geq H(X) - 1$.

Solutions de l'Exercice 3.

Solution Q1. L'ensemble des rotations de `ACACIA` est :

`ACACIA`, `AACACI`, `IAACAC`, `CIAACA`, `ACIAAC`, `CACIAA` .

On les classe dans l'ordre alphabétique :

$$\begin{bmatrix} \texttt{AACACI} \\ \texttt{ACACIA} \\ \texttt{ACIAAC} \\ \texttt{CACIAA} \\ \texttt{CIAACA} \\ \texttt{IAACAC} \end{bmatrix}$$

Puis, comme `ACACIA` est en seconde position dans le tableau, on retourne

$$2\,\texttt{IACAAC}$$

(on pourrait retourner 1 au lieu de 2 si l'on considère que le premier indice d'un tableau est 0).

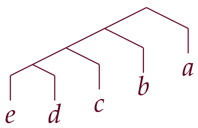
Solution Q2. Comme l'alphabet est de cardinal 4, on peut d'abord considérer que chaque symbole est codé avec $\log_2(4) = 2$ bits. L'encodage de Liv–Zempel est le plus court lorsque le mot est constitué de n fois le même symbole x. Dans ce cas, le mot de code est « $n\,x$ », et n est codé sur $\lceil \log_2(n) \rceil$ bits. La longueur minimale est donc $2 + \lceil \log_2(n) \rceil$.

Solution Q3. L'entropie de la source est $H(X) = \frac{1}{2}\log(2) + \frac{1}{4}\log(4) + \frac{1}{8}\log(8) + 2 \times \frac{1}{16}\log(16) = \frac{15}{8}$. Le code de Shannon–Fano associé à la source X a pour longueurs :

$$(1, 2, 3, 4, 4)\,.$$

Cela donne donc un code de longueur moyenne exactement $H(X)$, qui est une borne minimale sur la laongueur de codes uniquement décodables.

Une autre réponse pourrait constituer à calculer le code de Huffman, que l'on sait optimal. On obtiendrait dans ce cas l'arbre suivant :



et la longueur moyenne est bien $\frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{16} = \frac{15}{8}$.

Solution Q4. Oui, ce code est uniquement décodable. En effet, supposons que l'on reçoive un mot encodé $\boldsymbol{x} = x_1 \dots x_n$. Pour retrouver l'unique message qui a produit ce mot de code, on procède comme suit :

— on élimine x_1 (qui vaut nécessairement 1) et on lit $x_2 \in \{0,1\}$,
— si $x_2 = 1$, alors le premier mot de code est « 1 », et on recommence le procédé avec $\boldsymbol{x}' = x_2 \dots x_n$,
— si $x_2 = 0$, alors le premier mot de code est « 101 », et on recommence le procédé avec $\boldsymbol{x}' = x_4 \dots x_n$.

Solution Q5. On calcule :

$$2 \times \frac{1}{4} \times \log(4) + 3 \times \frac{1}{8} \times \log(8) + 4 \times \frac{1}{32} \times \log(32) = 1 + \frac{9}{8} + \frac{20}{32} = \frac{11}{4}\,.$$

Solution Q6.

1. Comme Y prend au plus deux valeurs distinctes, on a $H(Y) \leq \log(2) = 1$.
2. Notons qu'il y a une bijection entre X et (Y, X^2). Par conséquent, on a $H(X) = H(Y, X^2) \leq H(X^2) + H(Y) \leq H(X^2) + 1$. Donc :

$$I(X\,; X^2) = H(X^2) - H(X^2\,|\,X) \geq H(X) - 1 - \underbrace{H(X^2\,|\,X)}_{=0} = H(X) - 1\,.$$