Université Paris 8 J. Lavauzelle

Master 1 Mathématiques et applications — année 2023–24

# Théorie de l'Information – Solutions feuille de TD 1

18/09/2023

Retrouvez le sujet du TD et d'autres exercices à l'adresse :

`https://lvzl.fr/teaching/2023-24/ti.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin 💻 sur machine

## Exercice 1. ($\star$) Applications numériques.

**Question 1.–** Un tirage de la loterie consiste à choisir uniformément et sans remise 5 boules parmi 49, puis, de manière indépendante, à tirer un numéro complémentaire entre 1 et 10. Calculer l'entropie du tirage (on donnera une valeur approchée).

**Question 2.–** Comparer les entropies des variables aléatoires représentant :

(i) la valeur de 3 dés à 4 faces,
(ii) la valeur de 2 dés à 6 faces,
(iii) la valeur d'1 dé à 12 faces.

On supposera que les dés sont équilibrés.

**Question 3.–** On considère la distribution conjointe suivante :

| $p_{X,Y}(x,y)$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $y_1$ | $\frac{1}{4}$ | $0$ |
| $y_2$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{5}{8}$ |

Comparer les valeurs de $H(X)$, $H(Y)$, $H(X \mid Y)$ et $H(Y \mid X)$.

## Solutions de l'Exercice 1.

**Solution Q1.** Comme les deux tirages sont indépendants, on a

$$H(\texttt{loterie}) = H(\texttt{boules}) + H(\texttt{numéro})\,.$$

Pour le tirages des 5 boules, on tire un sous-ensemble de 5 éléments parmi 49. Comme le tirage est uniforme, l'entropie est

$$H(\texttt{boules}) = \log_2 \binom{49}{5} = \log_2 \left(\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}\right) = \log_2(1906884) \text{ bits.}$$

Le tirage du numéro complémentaire a une entropie de $H(\texttt{numéro}) = \log_2(10)$ bits.

Au total, on obtient donc $H(\texttt{loterie}) = \log_2(1906884) + \log_2(10) \simeq 24{,}18$ bits.

**Solution Q2.** On obtient les entropies suivantes.

(i) 3 dés à 4 faces : $H = 3\log_2 4 = 6$ bits ;
(ii) 2 dés à 6 faces : $H = 2\log_2 6 = 2 + 2\log_2 3 \simeq 5{,}2$ bits ;
(iii) 1 dé à 12 faces : $H = \log_2 12 = 2 + \log_2 3 \simeq 3{,}58$ bits ;

Le triplet de dés à 4 faces est donc la plus grande source d'aléa.

**Solution Q3.** On note $h(t) = -t\log t - (1-t)\log(1-t)$. On a respectivement :

- $H(X) = -p_{x_1}\log_2(p_{x_1}) - p_{x_2}\log_2(p_{x_2}) = h(\frac{3}{8}) = 3 - \frac{3}{8}\log 3 - \frac{5}{8}\log 5 \simeq 0{,}954$ bit.
- $H(Y) = h(\frac{1}{4}) = 2 - \frac{3}{4}\log 3 \simeq 0{,}811$ bit.
- $H(X \mid Y = y_1) = 0$ (lorsque $Y = y_1$, la valeur de $X$ est déterminée) et $H(X \mid Y = y_2) = h(\frac{1}{6}) = 1 + \log 3 - \frac{5}{6}\log 5 \simeq 0{,}650$ bit. Donc, $H(X \mid Y) = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{3}{4}h(\frac{1}{6}) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\log 3 - \frac{5}{8}\log 5 = 0{,}486$ bit.
- $H(Y \mid X = x_1) = h(\frac{1}{3}) = 2 - \log 3$ et $H(Y \mid X = x_2) = 0$. Donc $H(Y \mid X) = \frac{3}{8}h(1/3) \simeq 0{,}344$ bit.

---

## Exercice 2. ($\star$) Questions autour de l'entropie.

Soient $X, Y$ deux variables aléatoires à valeurs réelles. Répondre en justifiant aux questions suivantes :

**Question 1.–** Peut-on avoir $H(X) > 0$, $H(Y) > 0$ et $H(X+Y) = 0$ ?

**Question 2.–** Peut-on avoir $H(X) > 0$, $H(Y) > 0$ et $H(X, Y) = 0$ ?

**Question 3.–** Montrer que $H(X - Y, X + Y) = H(X, Y)$.

**Question 4.–** Montrer que $I(X ; Y) \leq \min\{H(X), H(Y)\}$ et donner un cas d'égalité.

## Solutions de l'Exercice 2.

**Solution Q1.** Oui. Par exemple en posant $Y = -X$, on a $H(X+Y) = H(0) = 0$.

**Solution Q2.** Non. On a toujours $H(X, Y) = H(X) + H(Y \mid X) \geq H(X) > 0$.

**Solution Q3.** On va montrer que $H(X - Y, X + Y) \leq H(X, Y)$ et $H(X - Y, X + Y) \geq H(X, Y)$.

D'abord, posons $g : (x, y) \mapsto (x - y, x + y)$. Par le principe de non-création d'information, on a

$$H(g(X,Y)) \leq H(X,Y)$$

ce qui nous donne la première inégalité.

Ensuite, notons que $g$ est une bijection $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (son inverse est $(x, y) \mapsto (\frac{y+x}{2}, \frac{y-x}{2})$. Par conséquent,

$$H(X,Y) = H(g^{-1}(g(X, Y))) \leq H(g(X, Y))\,.$$

**Solution Q4.** On a $I(X ; Y) = H(X) - H(X \mid Y) \leq H(X)$ car $H(X \mid Y) \geq 0$. De même $I(X ; Y) \leq H(Y)$.

On a égalité lorsque $X = Y$ par exemple : $I(X ; Y) = H(X)$.

---

## Exercice 3. ($\star\star$) Entropie et tirages uniformes.

Soit $X$ une variable aléatoire de distribution $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$.

**Question 1.–** Quelle est l'entropie de $X$ ? Quelle serait l'entropie maximale d'une variable aléatoire à image dans un ensemble à 4 élements ?

Soit $U$ la variable aléatoire uniforme sur $\{0, 1\}$. On considère l'algorithme suivant :

1. Tirer $u_1 \leftarrow U$. Si $u_1 = 0$, retourner $x = 1$.
2. Sinon, tirer un nouvel élément $u_2 \leftarrow U$. Si $u_2 = 0$, retourner $x = 2$.
3. Sinon, tirer un nouvel élément $u_3 \leftarrow U$. Si $u_3 = 0$, retourner $x = 3$. Sinon, retourner $x = 4$.

On suppose que les tirages successifs de $U$ sont indépendants.

**Question 2.–** Démontrer que l'algorithme retourne la valeur $i$ avec probabilité $p_i$, où $p_i$ est défini plus haut.

**Question 3.–** Quelle est le nombre moyen de tirages de $U$ lors d'une exécution de l'algorithme ? Comparer avec l'entropie de $X$.

## Solutions de l'Exercice 3.

**Solution Q1.** Ici, $H(X) = \frac{1}{2}\log(2) + \frac{1}{4}\log(4) + \frac{1}{8}\log(8) + \frac{1}{8}\log(8) = \frac{7}{4}$. L'entropie maximale d'une variable aléatoire prenant potentiellement 4 valeurs est $\log_2(4) = 2$.

**Solution Q2.** Notons $A$ la variable aléatoire de sortie de l'algorithme. L'algorithme retourne 1 si et seulement si le premier tirage de $U$ vaut 0, donc $p(A = 1) = p(U_1 = 0) = 1/2$. Ensuite, on a $A = 2$ si le premier tirage de $U$ est 1 et le second tirage de $U$ vaut 0. Comme ces tirages sont indépendants, on a

$$p(A = 2) = p(U_1 = 1 \text{ et } U_2 = 0) = p(U_1 = 1)p(U_2 = 0) = \frac{1}{4}.$$

En raisonnant de manière similaire, on obtient $p(A = 3) = p(A = 4) = 1/8$.

**Solution Q3.** Soit $N$ la variable aléaroire qui compte le nombre de tirages de $U$. On a $p(N = 1) = p(A = 1) = 1/2$, $p(N = 2) = p(A = 2) = 1/4$ et $p(N = 3) = p(A = 3 \text{ ou } A = 4) = 1/4$. Donc,

$$\mathbb{E}(N) = \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = H(X).$$

L'entropie de la variable aléatoire $X$ correspond au nombre moyen de tirages binaires uniformes nécessaires pour simuler $X$.

---

## Exercice 4. ($\star\star$) Entropie conditionnelle.

On considère une rencontre sportive en deux manches gagnantes, entre deux adversaires $A$ et $B$. On suppose que, pour toutes les manches de la rencontre, l'évènement « $A$ gagne la manche » suit une loi de Bernoulli de paramètre $0 < t < 1$. On suppose également que ces variables sont indépendantes.

On note :

— $\Omega$ l'ensemble des scores possibles de la rencontre (qu'on peut écrire sous la forme de chaînes de 2 ou 3 caractères, comme $'aa'$ pour signifier que $A$ a gagné la rencontre en deux manches), et $p$ sa loi de probabilité associée,

— $\mathcal{X} = \{A, B\}$ l'ensemble des gagnant·e·s possibles de la rencontre, et $X$ la variable associée,

— $\mathcal{N} = \{2, 3\}$ l'ensemble correspondant au nombre de manches du match, et $N$ la variable associée,

— $\mathcal{Y} = \{a^*, b^*\}$ l'ensemble représentant le·a gagnant·e de la première manche, et $Y$ la variable associée ($a^*$ signifie que $A$ a gagné la première manche).

**Question 1.–** Donner la distribution de probabilités de $p$, ainsi que des lois des variables $X$, $Y$ et $N$.

**Question 2.–** Calculer et comparer les entropies $H(X)$, $H(Y)$ et $H(X,Y)$.

**Question 3.–** Rappeler comment se comparent génériquement $H(N)$ et $H(N|Y)$. Calculer $H(N)$, $H(N|Y = a^*)$ et $H(N|Y = b^*)$. Commenter.

## Solutions de l'Exercice 4.

**Solution Q1.** Écrivons d'abord la distribution de $p$ :

| $\omega$ | $aa$ | $aba$ | $abb$ | $baa$ | $bab$ | $bb$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(\omega)$ | $t^2$ | $t^2(1-t)$ | $t(1-t)^2$ | $t^2(1-t)$ | $t(1-t)^2$ | $(1-t)^2$ |

On peut alors calculer les tables des distributions des variables $X$, $Y$ et $N$ :

| $x$ | $A$ | $B$ |
|---|---|---|
| $p_X(x)$ | $t^2(3-2t)$ | $(1+2t)(1-t)^2$ |

| $y$ | $a^*$ | $b^*$ |
|---|---|---|
| $p_Y(y)$ | $t$ | $1-t$ |

| $n$ | 2 | 3 |
|---|---|---|
| $p_N(n)$ | $t^2 + (1-t)^2$ | $2t(1-t)$ |

**Solution Q2.** Pour $H(X)$ et $H(Y)$, le calcul est immédiat :

$$H(Y) = -t\log_2(t) - (1-t)\log_2(1-t) = h(t)$$

et

$$H(X) = h(t^2(3-2t))$$

où la fonction $h(\cdot)$ est la fonction d'entropie binaire.

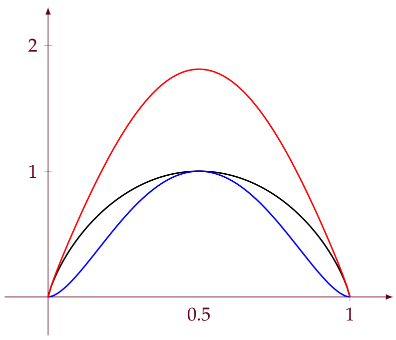
Pour la variable conjointe $X,Y$, présentons d'abord sa table de probabilités :

| $p_{X,Y}(x,y)$ | $x = A$ | $x = B$ |
|---|---|---|
| $y = a^*$ | $t^2(2-t)$ | $t(1-t)^2$ |
| $y = b^*$ | $(1-t)t^2$ | $(1-t)^2(1+t)$ |

Puis on obtient

$$\begin{aligned} H(X,Y) = &-2t^2(2-t)\log_2(t) - t^2(2-t)\log_2(2-t) - t(1-t)^2\log_2(t) - 2t(1-t)^2\log_2(1-t) \\ &- 2(1-t)t^2\log_2(t) - (1-t)t^2\log_2(1-t) - 2(1-t)^2(1+t)\log_2(1-t) - (1-t)^2(1+t)\log_2(1+t) \\ = &\; t(1+4t-3t^2)\log_2\left(\frac{1}{t}\right) + (1-t)(1+4(1-t)-3(1-t)^2)\log_2\left(\frac{1}{1-t}\right) \\ &+ t^2(2-t)\log_2\left(\frac{1}{2-t}\right) + (1-t)^2(1+t)\log_2\left(\frac{1}{1+t}\right). \end{aligned}$$

En fonction de $t$, les entropies calculées ont la forme suivante ($H(Y)$ en noir, $H(X)$ en bleu, $H(X,Y)$ en rouge) :




**Solution Q3.** On a toujours $H(N \mid Y) \leq H(N)$. Ici,

$$H(N) = h(t^2 + (1-t)^2).$$

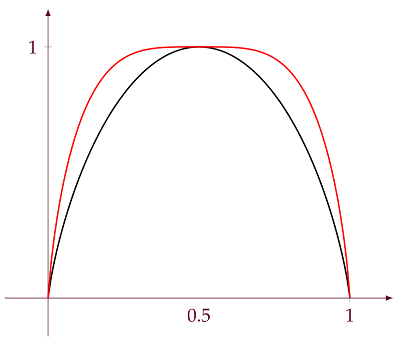
Par ailleurs, on a $p(N = 2 \mid Y = a^*) = \frac{p(N=2 \text{ et } Y=a^*)}{p(Y=a^*)} = \frac{t^2}{t} = t$ donc $p(N = 3 \mid Y = a^*) = (1-t)$ et il en résulte que :

$$H(N \mid Y = a^*) = h(t).$$

Similairement, comme $p(N = 2 \mid Y = b^*) = 1 - t$, on obtient

$$H(N \mid Y = b^*) = h(1-t) = h(t).$$

On en conclut que $H(N \mid Y) = h(t)$. On peut également vérifier graphiquement que $H(N \mid Y) \leq H(N)$ (où $H(N)$ est en rouge, $H(N \mid Y)$ est en noir) :




---

## Exercice 5. ($\star\star\star$) Entropie et probabilité maximale.

Soit $X$ une variable aléatoire de distribution $(p_1, \ldots, p_n)$. On suppose que tous les $p_i$ sont non-nuls et on note $p^* := \max\{p_i\}_{1 \leq i \leq n}$.

**Question 1.–** Montrer que $H(X) \geq -\log_2(p^*)$.

**Question 2.–** Vérifier que cela ne contredit pas la borne $H(X) \leq \log_2(n)$ vue en cours.

**Question 3.–** Démontrer que, pour tous $a, b \geq 0$ avec $a + b > 0$, on a :

$$-(a+b)\log_2(a+b) \leq -a\log_2(a) - b\log_2(b) \leq -(a+b)\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Démontrer également que la première égalité se produit si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$, et que la seconde se produit si et seulement si $a = b$.

**Question 4.–** Grâce à la question précédente, montrer que $H(X) \geq h_2(p^*)$, où $h_2(t) := -t\log_2(t) - (1-t)\log_2(1-t)$ est la fonction d'entropie binaire.

**Question 5.–** En déduire que $H(X) \geq 2(1-p^*)$.

## Solutions de l'Exercice 5.

**Solution Q1.** Comme $-\log p_i \geq -\log p^*$ pour tout $i$, on obtient :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \geq -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p^* = -\log p^*.$$

**Solution Q2.** Il suffit d'observer que, comme $p^* = \max_{1\leq i\leq n}\{p_i\}$, on a bien $p^* \geq 1/n$. En effet, si ce n'était pas le cas, alors la somme $\sum_{i=1}^{n} p_i \leq np^*$ serait strictement plus petite que 1, ce qui est impossible (elle vaut 1 par définition d'une loi de probabilité).

**Solution Q3.** Soit $t = \frac{a}{a+b}$. On sait que $0 \leq h_2(t) \leq 1 = \log 2$, où $h_2(t) = -t\log t - (1-t)\log(1-t)$ est la fonction d'entropie binaire. On obtient donc :

$$0 \leq -\frac{a}{a+b}\log\left(\frac{a}{a+b}\right) - \frac{b}{a+b}\log\left(\frac{b}{a+b}\right) \leq \log 2$$

ce qui est équivalent à

$$-\log(a+b) \leq -\frac{a}{a+b}\log a - \frac{b}{a+b}\log b \leq -\log(a+b) + \log 2.$$

Le résultat voulu en résulte en multipliant par $a+b$.

Concernant les cas d'égalité :

— la première égalité se produit lorsque $h_2(t) = 0$, c'est-à-dire pour $t \in \{0,1\}$ ce qui correspond à $a = 0$ ou $b = 0$;

— la seconde égalité se produit lorsque $h_2(t) = 0$, autrement dit pour $t = 1/2$, ce qui correspond à $a = b$.

**Solution Q4.** Quitte à réordonner les indices, supposons que $p_1 = p^*$. D'après la question précédente, on a

$$-\sum_{i=2}^{n} p_i \log p_i \geq -\left(\sum_{i=2}^{n} p_i\right)\log\left(\sum_{i=2}^{n} p_i\right).$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} H(X) &= -p_1\log p_1 - \sum_{i=2}^{n} p_i\log p_i \\ &\geq -p_1\log p_1 - \left(\sum_{i=2}^{n} p_i\right)\log\left(\sum_{i=2}^{n} p_i\right) \\ &= -p^*\log p^* - (1-p^*)\log(1-p^*). \end{aligned}$$

**Solution Q5.** Pour cette question, on distingue deux cas.

— Si $p^* \geq \frac{1}{2}$, comme la fonction $t \mapsto h_2(t)$ est strictement concave sur $[\frac{1}{2}, 1]$, son graphe se situe au-dessus de la droite l'intersectant en $t = \frac{1}{2}$ et $t = 1$. Cette droite a pour équation $y = 2 - 2x$ (car $h_2(\frac{1}{2}) = 1$ et $h_2(1) = 0$). On obtient donc, grâce à la question précédente :

$$H(X) \geq h_2(p^*) \geq 2 - 2p^* .$$

— Si $p^* \leq \frac{1}{2}$, on commence par établir que $-\log_2 t \geq 2(1-t)$ pour tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$ (la vérification est élémentaire). Puis, grâce à la question 1 on obtient

$$H(X) \geq -\log_2(p^*) \geq 2 - 2p^* .$$

---