Théorie de l'Information – Solutions feuille de TD 5

23/10/2023

Retrouvez le sujet du TD et d'autres exercices à l'adresse :

`https://lvzl.fr/teaching/2023-24/ti.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin 💻 sur machine

Exercice 1. ($\star\star$) Capacité du canal à effacement.

Le but de cet exercice est de calculer la capacité du canal à effacement d'entrée binaire $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ et de paramètre λ. On rappelle que ce canal est donné par la matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ \lambda & \lambda \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

On note X l'entrée du canal et Y sa sortie. On désigne par $\perp$ le symbole d'effacement.

Question 1.– Exprimer $H(Y \mid X)$ en fonction de λ.

Question 2.– L'entrée du canal est une variable aléatoire X binaire, dont on note la probabilité $p_X(0) = \alpha$. Démontrer que

$$H(Y) = (1-\lambda)h(\alpha) + h(\lambda)\,.$$

Question 3.– En déduire que la capacité du canal à effacement est $1 - \lambda$.

Solutions de l'Exercice 1.

Solution Q1. On utilise la formule générique :

$$H(Y \mid X) = \sum_x p(x) \underbrace{\sum_y p(y \mid x) \log_2 \frac{1}{p(y \mid x)}}_{H(Y \mid X=x)}$$

Calculons d'abord $H(Y \mid X = 0)$.

$$\begin{aligned} H(Y \mid X = 0) &= -p_{Y|X}(0 \mid 0) \log_2 p_{Y|X}(0 \mid 0) - p_{Y|X}(\perp \mid 0) \log_2 p_{Y|X}(\perp \mid 0) - p_{Y|X}(1 \mid 0) \log_2 p_{Y|X}(1 \mid 0) \\ &= (1-\lambda) \log_2 \frac{1}{1-\lambda} + \lambda \log_2 \frac{1}{\lambda} + 0 = h(\lambda)\,. \end{aligned}$$

De même $H(Y \mid X = 1) = h(\lambda)$. Par conséquent,

$$H(Y \mid X) = \sum_x p(x) \cdot h(\lambda) = 1 \cdot h(\lambda) = h(\lambda)\,.$$

Solution Q2. Il faut calculer $p(Y = 0)$, $p(Y = \perp)$ et $p(Y = 1)$:

$$\begin{aligned} &p(Y = 0) = \sum_x p(X = x) p(Y = 0 \mid X = x) = \alpha(1-\lambda) \\ &p(Y = \perp) = \lambda\alpha + \lambda(1-\alpha) = \lambda \\ &p(Y = 1) = (1-\lambda)(1-\alpha) \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}
H(Y) &= \left(\alpha(1-\lambda)\log_2 \frac{1}{\alpha(1-\lambda)}\right) + \left(\lambda \log_2 \frac{1}{\lambda}\right) + \left((1-\alpha)(1-\lambda)\log_2 \frac{1}{(1-\alpha)(1-\lambda)}\right) \\
&= \left(\lambda \log_2 \frac{1}{\lambda}\right) + \left((\alpha + (1-\alpha))(1-\lambda)\log_2 \frac{1}{(1-\lambda)}\right) \\
&\qquad + \left(\alpha(1-\lambda)\log_2 \frac{1}{\alpha} + (1-\alpha)(1-\lambda)\log_2 \frac{1}{1-\alpha}\right) \\
&= h(\lambda) + (1-\lambda)h(\alpha)
\end{aligned}$$

Solution Q3. On doit maximiser $I(X\,;Y) = H(Y) - H(Y\,|\,X)$ en fonction de α. On a :

$$I(X\,;Y) = h(\lambda) + (1-\lambda)h(\alpha) - h(\lambda) = (1-\lambda)h(\alpha)\,.$$

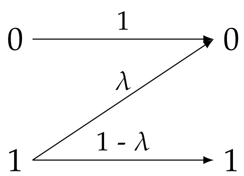
On sait que la fonction $\alpha \mapsto h(\alpha)$ est maximale pour $\alpha = 1/2$, et vaut 1 dans ce cas. Donc la capacité du canal binaire à effacement est :

$$1 - \lambda\,.$$

Remarquons que cette capacité est atteinte si et seulement si la source X est uniforme.

Exercice 2. ($\star\star$) Canal Z.

Dans cet exercice, on se propose de calculer la capacité d'un canal de transmission appelé « canal Z ». Ce canal est binaire (l'entrée et la sortie ont taille 2), et peut être défini par le diagramme suivant, lui donnant son nom.



On note X et Y les variables aléatoires, toutes deux définies sur $\{0,1\}$, associées à la sortie et à l'entrée du canal. On note $\alpha := p(X = 0)$. On rappelle que

$$h(t) := t \log_2 \frac{1}{t} + (1-t)\log_2 \frac{1}{1-t}$$

est la fonction d'entropie binaire.

Question 1.– Donner la matrice de transition $\boldsymbol{M}$ du canal.

Question 2.– Calculer $H(Y\,|\,X = 0)$. Interpréter.

Question 3.– Montrer que $H(Y\,|\,X) = (1-\alpha)h(\lambda)$.

Question 4.– Calculer $H(Y)$ puis $I(X\,;Y)$.

Pour $\lambda \in]0,1[$ fixé, on pose $f_\lambda(x) := h((1-\lambda)(1-x)) - (1-x)h(\lambda)$ et on note

$$\mu(\lambda) := 1 - \frac{1}{(1-\lambda)(1 + 2^{h(\lambda)/(1-\lambda)})}\,.$$

Question 5.– Démontrer que le minimum de f_λ sur $[0,1]$ est atteint en $x = \mu(\lambda)$.

Question 6.– En déduire que la capacité du canal Z est

$$\log_2\left(1 + \frac{1}{2^{h(\lambda)/(1-\lambda)}}\right)\,.$$

Question 7.– Que vaut cette capacité pour $\lambda \to 0$? Interpréter.

Solutions de l'Exercice 2.

Solution Q1. On a $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$.

Solution Q2. On obtient $H(Y \mid X = 0) = 0$. L'interprétation est la suivante : lorsque $X = 0$, nécessairement $Y = 0$ donc il n'y a aucun aléa dans la sortie.

Solution Q3. Observons que $H(Y \mid X = 1) = h(\lambda)$. Puis, le calcul donne :

$$H(Y \mid X) = p(X = 0)H(Y \mid X = 0) + p(X = 1)H(Y \mid X = 1) = 0 + (1-\alpha)h(\lambda)\,.$$

Solution Q4. On a $p(Y = 0) = \alpha + \lambda(1-\alpha)$ et $p(Y = 1) = (1-\alpha)(1-\lambda)$. Donc

$$H(Y) = h((1-\alpha)(1-\lambda))$$

et

$$I(X;Y) = h((1-\lambda)(1-\alpha)) - (1-\alpha)h(\lambda)\,.$$

Solution Q5. On calcule $f'(x) = -(1-\lambda)h'((1-x)(1-\lambda)) + h(\lambda)$, et on vérifie facilement que $h'(t) = \log_2((1-t)/t)$. Donc,

$$f'(x) = h(\lambda) - (1-\lambda)\log_2\left(\frac{1-(1-x)(1-\lambda)}{(1-x)(1-\lambda)}\right)\,.$$

Ainsi, $f'(x) = 0$ si et seulement si $2^{h(\lambda)/(1-\lambda)} = \frac{1-(1-x)(1-\lambda)}{(1-x)(1-\lambda)}$. Ceci équivaut à $x = \mu(\lambda)$.

Solution Q6. Si l'on pose $u = \frac{1}{1+2^{h(\lambda)/(1-\lambda)}}$, alors on a $\frac{1-u}{u} = 2^{h(\lambda)/(1-\lambda)}$. Puis, la capacité est obtenue en évaluant f en $\mu(\lambda)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
C = f(\mu(\lambda)) &= h(u) - \frac{h(\lambda)}{1-\lambda}u \\
&= u\log\frac{1}{u} - (1-u)\log(1-u) - \frac{h(\lambda)}{1-\lambda}u \\
&= u\log\frac{1-u}{u} - \log(1-u) - \frac{h(\lambda)}{1-\lambda}u \\
&= u\frac{h(\lambda)}{1-\lambda} + \log\left(\frac{1}{1-u}\right) + \frac{h(\lambda)}{1-\lambda}u \\
&= \log\left(\frac{1}{1-u}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{2^{h(\lambda)/(1-\lambda)}}\right).
\end{aligned}$$

Solution Q7. Pour $\lambda \to 0$, on a $C \to 1$. Interprétation : pas d'erreur, donc on transmet toute l'information.