Théorie de l'Information – Feuille de TD 1

18/09/2023

Le corrigé de certains exercices sera disponible à l'adresse suivante :

`https://lvzl.fr/teaching/2023-24/ti.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin 💻 sur machine

Exercice 1. ($\star$) Applications numériques.

Question 1.– Un tirage de la loterie consiste à choisir uniformément et sans remise 5 boules parmi 49, puis, de manière indépendante, à tirer un numéro complémentaire entre 1 et 10. Calculer l'entropie du tirage (on donnera une valeur approchée).

Question 2.– Comparer les entropies des variables aléatoires représentant :

(i) la valeur de 3 dés à 4 faces,
(ii) la valeur de 2 dés à 6 faces,
(iii) la valeur d'1 dé à 12 faces.

On supposera que les dés sont équilibrés.

Question 3.– On considère la distribution conjointe suivante :

$p_{X,Y}(x,y)$	x_1	x_2
y_1	$\frac{1}{4}$	0
y_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$

Comparer les valeurs de $H(X)$, $H(Y)$, $H(X\,|\,Y)$ et $H(Y\,|\,X)$.

Exercice 2. ($\star$) Questions autour de l'entropie.

Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs réelles. Répondre en justifiant aux questions suivantes :

Question 1.– Peut-on avoir $H(X) > 0$, $H(Y) > 0$ et $H(X+Y) = 0$?

Question 2.– Peut-on avoir $H(X) > 0$, $H(Y) > 0$ et $H(X, Y) = 0$?

Question 3.– Montrer que $H(X-Y, X+Y) = H(X, Y)$.

Question 4.– Montrer que $I(X\,;Y) \leq \min\{H(X), H(Y)\}$ et donner un cas d'égalité.

Exercice 3. ($\star\star$) Entropie et tirages uniformes.

Soit X une variable aléatoire de distribution $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$.

Question 1.– Quelle est l'entropie de X ? Quelle serait l'entropie maximale d'une variable aléatoire à image dans un ensemble à 4 élements ?

Soit U la variable aléatoire uniforme sur $\{0, 1\}$. On considère l'algorithme suivant :

1. Tirer $u_1 \leftarrow U$. Si $u_1 = 0$, retourner $x = 1$.
2. Sinon, tirer un nouvel élément $u_2 \leftarrow U$. Si $u_2 = 0$, retourner $x = 2$.
3. Sinon, tirer un nouvel élément $u_3 \leftarrow U$. Si $u_3 = 0$, retourner $x = 3$. Sinon, retourner $x = 4$.

On suppose que les tirages successifs de U sont indépendants.

Question 2.– Démontrer que l'algorithme retourne la valeur i avec probabilité p_i, où p_i est défini plus haut.

Question 3.– Quelle est le nombre moyen de tirages de U lors d'une exécution de l'algorithme ? Comparer avec l'entropie de X.

Exercice 4. ($\star\star\star$) Entropie et probabilité maximale.

Soit X une variable aléatoire de distribution $(p_1, \dots, p_n)$. On suppose que tous les p_i sont non-nuls et on note $p^* := \max\{p_i\}_{1 \leq i \leq n}$.

Question 1.– Montrer que $H(X) \geq -\log_2(p^*)$.

Question 2.– Vérifier que cela ne contredit pas la borne $H(X) \leq \log_2(n)$ vue en cours.

Question 3.– Démontrer que, pour tous $a, b \geq 0$ avec $a + b > 0$, on a :

$$-(a+b)\log_2(a+b) \leq -a\log_2(a) - b\log_2(b) \leq -(a+b)\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Démontrer également que la première égalité se produit si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$, et que la seconde se produit si et seulement si $a = b$.

Question 4.– Grâce à la question précédente, montrer que $H(X) \geq h_2(p^*)$, où $h_2(t) := -t\log_2(t) - (1-t)\log_2(1-t)$ est la fonction d'entropie binaire.

Question 5.– En déduire que $H(X) \geq 2(1 - p^*)$.