Université Paris 8 J. Lavauzelle

Master 1 Mathématiques et applications — année 2023–24

Théorie de l'Information – Feuille de TD 2

25/09/2023

Le corrigé de certains exercices sera disponible à l'adresse suivante :

`https://lvzl.fr/teaching/2023-24/ti.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin 💻 sur machine

Exercice 1. ($\star$) Information mutuelle.

Question 1.– Lors d'un lancer de pièce (supposée équilibrée), quelle est l'information mutuelle entre chacune des deux faces de la pièce ?

Question 2.– Lors d'un lancer de dé à 6 faces équilibré, quelle est l'information mutuelle entre deux faces opposées du dé ? Et entre deux faces adjacentes ?

Question 3.– Dans une urne contenant $n = 4$ boules noires et $r = 2$ boules rouges, on effectue deux tirages consécutifs et sans remise d'une boule. On note T_1 le premier tirage et T_2 le second tirage. Calculer l'information mutuelle entre ces deux tirages.

Exercice 2. ($\star$) Information mutuelle et non-création d'information.

Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs respectives dans $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$. On considère également $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ et $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ deux applications.

Question 1.– Démontrer que $I(X\,; f(X)) = H(f(X))$.

Question 2.– Démontrer que $I(X\,;Y) \leq I(X\,; g(Y))$.

Question 3.– En déduire que $I(f(X)\,; g(Y)) \leq I(X;Y)$.

Exercice 3. ($\star\star$) Entropie maximale à espérance fixée.

Soit Γ la loi géométrique de paramètre $\gamma > 0$. On rappelle que Γ est une variable aléatoire discrète (mais non finie) à valeurs entières, et qu'elle est donnée par

$$p(\Gamma = n) := (1-\gamma)\gamma^n, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Question 1.– Calculer l'espérance de Γ.

Question 2.– Calculer $H(\Gamma)$.

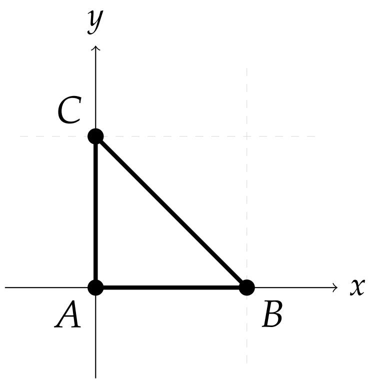
Question 3.– Démontrer que toute variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérance $\mu = \mathbb{E}(\Gamma)$, vérifie :

$$H(X) \leq H(\Gamma)\,.$$

Indication : on peut établir la relation $H(\Gamma) - H(X) = D_{\mathrm{KL}}(p_X \,\|\, p_\Gamma)$.

Exercice 4. ($\star\star$) Tirage sur les sommets d'un triangle.

On considère un triangle (ABC) du plan dont les sommets ont pour coordonnées : $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$.



On effectue des tirages aléatoires parmi les trois sommets du triangle. On note X l'abscisse du point obtenu et Y son ordonnée.

Question 1.– Dans cette question, on suppose que le tirage est uniforme.

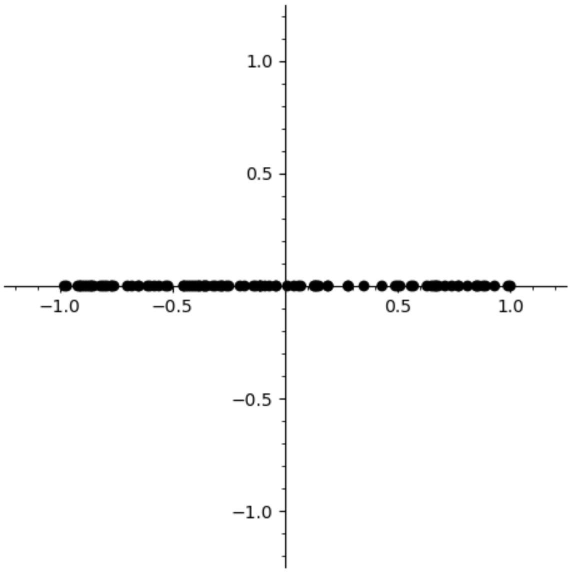
1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Que peut-on dire de $H(X \mid Y = 1)$?
3. Calculer $H(X)$, $H(X \mid Y)$ et l'information mutuelle $I(X\,;Y)$.

Question 2.– Dans cette question, on fixe $\alpha \in [0,1]$ et on suppose que l'on tire A avec probabilité α, et B et C chacun avec probabilité $\frac{1-\alpha}{2}$.

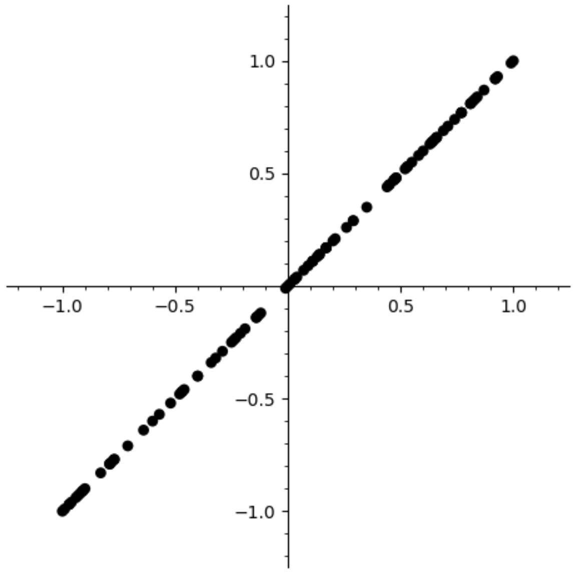
1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Calculer et tracer l'information mutuelle $I(X\,;Y)$ en fonction de α.

Exercice 5. (⋆⋆⋆) Estimation graphique de grandeurs informationnelles.

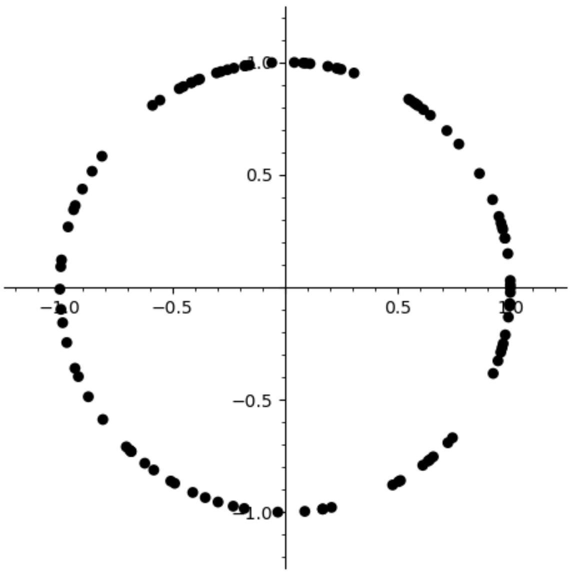
Dans les quatre graphes de la Figure 1, on représente le tirage de 100 points dans le plan selon quatre distributions distinctes.



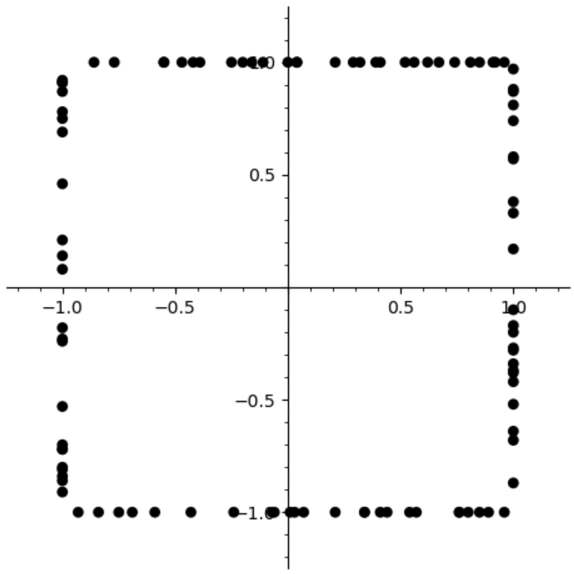
(a) Distribution 1



(b) Distribution 2



(c) Distribution 3



(d) Distribution 4

FIGURE 1 – Tirages selon quatre distributions dans le plan

Pour chacune de ces distributions, on note X la variable aléatoire représentant l'abscisse du point tiré, et Y son ordonnée. Le tirage d'un point correspond donc à la réalisation de la variable conjointe (X, Y). On note $H(X, Y)$ son entropie.

Pour simplifier l'étude, on pourra supposer que les tirages de certains points géométriques « extrémaux » (par exemple : les coins du carré de la distribution 4) sont de probabilité nulle.

Question 1.– Pour chacune des distributions, exprimer, si besoin en fonction de $H(X, Y)$:

1. l'entropie $H(X)$ de l'abscisse et celle $H(Y)$ de l'ordonnée ;
2. l'entropie $H(X|Y)$ de l'abscisse sachant l'ordonnée ;
3. l'information mutuelle $I(X ; Y)$ entre l'abscisse et l'ordonnée.