Université Paris 8 J. Lavauzelle

Master 1 Mathématiques et applications — année 2023–24

Théorie de l'Information – Feuille de TD 5

23/10/2023

Le corrigé de certains exercices sera disponible à l'adresse suivante :

`https://lvzl.fr/teaching/2023-24/ti.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin 💻 sur machine

---

Exercice 1. ($\star\star$) Capacité du canal à effacement.

Le but de cet exercice est de calculer la capacité du canal à effacement d'entrée binaire $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ et de paramètre λ. On rappelle que ce canal est donné par la matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ \lambda & \lambda \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

On note X l'entrée du canal et Y sa sortie. On désigne par $\perp$ le symbole d'effacement.

Question 1.– Exprimer $H(Y \mid X)$ en fonction de λ.

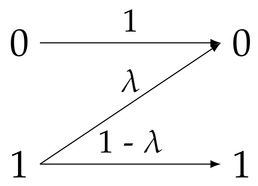
Question 2.– L'entrée du canal est une variable aléatoire X binaire, dont on note la probabilité $p_X(0) = \alpha$. Démontrer que

$$H(Y) = (1-\lambda)h(\alpha) + h(\lambda)\,.$$

Question 3.– En déduire que la capacité du canal à effacement est $1 - \lambda$.

Exercice 2. ($\star\star$) Canal Z.

Dans cet exercice, on se propose de calculer la capacité d'un canal de transmission appelé « canal Z ». Ce canal est binaire (l'entrée et la sortie ont taille 2), et peut être défini par le diagramme suivant, lui donnant son nom.



On note X et Y les variables aléatoires, toutes deux définies sur $\{0,1\}$, associées à la sortie et à l'entrée du canal. On note $\alpha := p(X=0)$. On rappelle que

$$h(t) := t\log_2 \frac{1}{t} + (1-t)\log_2 \frac{1}{1-t}$$

est la fonction d'entropie binaire.

Question 1.– Donner la matrice de transition $\boldsymbol{M}$ du canal.

Question 2.– Calculer $H(Y\,|\,X=0)$. Interpréter.

Question 3.– Montrer que $H(Y\,|\,X) = (1-\alpha)h(\lambda)$.

Question 4.– Calculer $H(Y)$ puis $I(X\,;Y)$.

Pour $\lambda \in\,]0,1[$ fixé, on pose $f_\lambda(x) := h((1-\lambda)(1-x)) - (1-x)h(\lambda)$ et on note

$$\mu(\lambda) := 1 - \frac{1}{(1-\lambda)(1+2^{h(\lambda)/(1-\lambda)})}\,.$$

Question 5.– Démontrer que le minimum de f_λ sur $[0,1]$ est atteint en $x = \mu(\lambda)$.

Question 6.– En déduire que la capacité du canal Z est

$$\log_2\left(1 + \frac{1}{2^{h(\lambda)/(1-\lambda)}}\right)\,.$$

Question 7.– Que vaut cette capacité pour $\lambda \to 0$? Interpréter.