FAMILLES DE FONCTIONS L ET TYPES DE SYMÉTRIES

DIDIER LESESVRE

Table des matières

Notations 2
1. Introduction : pourquoi les fonctions L et leurs zéros ? 2
1.1. Importance des zéros 2
1.2. L'interprétation spectrale des nombres 2
1.3. Lien entre formules explicites et formules des traces 3
2. Statistiques et symétries sur les zéros et les angles propres 3
2.1. Le cadre : matrices et fonctions L 3
2.2. Corrélations pour les matrices, des statistiques qui semblent universelles 3
2.3. Corrélations pour les fonctions L 4
2.4. Densité et variabilité du type de symétrie, le cadre matriciel 4
2.5. Les densités pour les fonctions L 5
3. Le cas des torsions quadratiques et la symétrie symplectique 6
3.1. Aperçu des résultats 6
3.2. Le résultat de Rubinstein 6
3.3. Des résultats récents sur le passage de 1 8
Annexe A. Le type de symétrie du groupe symplectique 9
Références 10

Résumé. Les formules explicites relient distributions de nombres premiers et de zéros non triviaux de fonctions L : bien comprendre les statistiques sur ces zéros permet donc de dévoiler plus finement la structure des nombres. Ces études de zéros sont de fait devenues le Graal de la théorie des nombres, ainsi l'hypothèse de Riemann et ses généralisations.

Au début du XX$^{\text{e}}$ siècle, Pólya et Hilbert suggèrent l'existence d'une interprétation des zéros des fonctions L en termes d'opérateurs sur des espaces hilbertiens. Ces intuitions se trouvent renforcées par les travaux théoriques de Montgomery et numériques d'Odlyzko, qui pointent que les zéros de la fonction ζ et les angles propres de GUE suivent la même distribution. Montgomery conjecture alors que GUE est le modèle universel régissant les statistiques sur ces deux classes d'objets. Mais plus finement, ce sont les statistiques sur les petits zéros des fonctions L et les petits angles propres qui s'avèrent d'importance primordiale : GUE n'est plus la loi universelle, et l'on classe les familles de fonctions L en fonction de quelques groupes classiques de matrices, ayant les mêmes répartitions statistiques.

Après avoir rappelé les premiers résultats sur les corrélations de zéros et d'angles propres de GUE, nous présentons les résultats concernant les zéros des fonctions L attachées aux caractères quadratiques. Le type de symétrie arrive à être déterminé par Ozlük et Snyder, puis le résultat étendu à un cadre plus général par Rubinstein dont nous présentons en détails la preuve, ainsi que quelques raffinements ultérieurs et récents.

Ce texte [1] n'est en rien original, mais une étude tâchant de rendre compte de certaines idées et méthodes propres aux études de statistiques sur les zéros de fonctions L. Ce petit apperçu de ces problèmes se concentre sur la motivation et le développement du cadre, et s'attaque au problème

[1]. Notes préparées pour un exposé donné au groupe de travail de théorie analytique des nombres d'Orsay les 26 janvier et 2 février 2016. Toute critique ou commentaire sera le bienvenu : didier.lesesvre@univ-paris13.fr.

des fonctions L associées aux caractères quadratiques, dont le comportement et les preuves sont représentatifs et dont les aboutissements récents prouvent toute l'actualité et la non-trivialité.

Notations

1. Introduction : pourquoi les fonctions L et leurs zéros ?

1.1. **Importance des zéros.** Les fonctions L, dont l'exemple-phare est la fonction ζ de Riemann, sont omniprésentes en théorie des nombres. Leurs zéros, bien que demeurant très mystérieux, portent des informations considérables sur la répartition des nombres premiers. Ces informations proviennent notamment de la localisation des zéros de ζ, par l'intermédiaire des formules explicites reliant sommes sur les zéros et somme de nombres premiers, dont la première vient de Riemann (1859) [2] :

$$\psi(x) := \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) + \frac{1}{2}\Lambda(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{1}{2}\log(1-x^2) - \log(2\pi)$$

En 1952, Weil [21] donne une formule explicite très générale, qui a l'avantage d'être adélique et sous forme d'une égalité de distributions [**?**] :

$$\widehat{\phi}(1) + \widehat{\phi}(0) - \sum_{\rho} \widehat{\phi}(\rho) = \sum_{p,m} \frac{\log p}{p^{m/2}}(\phi(\log p^m) + \phi(-\log p^m)) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \phi(t)\Psi(t)dt$$

où $\phi : \hat{F}$, $\Phi(1/2+it) = \phi(t)$, $\Psi(t) = -\log(\pi) + \Re\psi(1/4+it/2))$ et $\psi = \Gamma'/\Gamma$ est la fonction digamma.

Une motivation pour l'étude des statistiques sur les zéros des fonctions L est donnée par [11], remarquant que les formules explicites sont génériquement de la forme

$$\pi(x) = TP + TE + TO$$

où $\pi(x)$ est une certaine statistique sur les nombres premiers. TP est le terme principal provenant de zéros particuliers de la fonction L. TE est une somme portant sur les zéros triviaux. Enfn, TO est un terme oscillant provenant du reste des zéros. C'est ce dernier terme qui est d'étude délicate, et pour lequel une bonne connaissance de la répartition des zéros permet de déduire des compensations. La répartition des zéros permet donc notamment d'obtenir des restes précis. Ainsi, sous l'hypothèse de Riemann, tous les zéros non triviaux de la fonction ζ se trouvent sur la droite critique $Re(s) = \frac{1}{2}$, le terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers devient alors :

$$\text{(Sans RH)} \quad \pi(x) = li(x) + O(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}}) \longrightarrow \text{(Avec RH)} \quad \pi(x) = li(x) + O(\sqrt{x}\log x)$$

1.2. **L'interprétation spectrale des nombres.** Dès le début du XX$^{\text{e}}$ siècle, Hilbert et Pólya suggèrent une interprétation des zéros des fonctions L en termes spectraux, se basant sur nombreuses analogies entre fonctions L et matrices :

Matrices	Fonctions L
Polynôme caractéristique χ_A	Fonction $L(s)$
Équation fonctionnelle $z \leftrightarrow 1/z$	Équation fonctionnelle $s \leftrightarrow 1-s$
Spectre dans S^1	(GRH) Zéros sur $\Re s = \frac{1}{2}$
Déterminant $\det(A)$	Signe ε de l'équation fonctionnelle

La métaconjecture de Hilbert et Pólya peut se mettre sous la forme d'une égalité distributionnelle : il existerait un opérateur T_L hermitien associé à chaque fonction L tel que

$$\sum_{\rho_L} F(\rho_L) = Tr(F(\hat{T}_L))$$

1.3. **Lien entre formules explicites et formules des traces.** La ressemblance entre les formules explicites, reliant zéros d'une fonction L et nombres premiers, et la formule des traces de Selberg, reliant spectre d'un opérateur et géométrie d'un espace symétrique, est un indice supplémentaire de ce lien probable, soulignée depuis longtemps [16]. On le note déjà dans le cas de la dimension 1, qui est la formule de Poisson :

$$\sum_n f(n) = \sum_n \hat{f}(2\pi n)$$

qui est une égalité distributionnelle entre d'un côté, les longueurs des géodésiques fermées sur le cercle S^1, et de l'autre, les racines des valeurs propres du laplacien Δ. Si les ponts ne sont pas encore tous construits, les résultats pointent tous en ce sens, et Goldfeld a récemment trouvé des raisons à ces dernières ressemblances : les formules explicites générales sont un cas particulier de la formule des traces pour des opérateurs bien construits sur $\mathbf{I^1} \rtimes \mathbf{A}/\mathbf{Q}^\times \rtimes \mathbf{Q}$.

Si les intuitions de Pólya et Hilbert s'avèrent exactes, même sans en comprendre les raisons il est pertinent de s'interroger sur la manière de détecter les corrélations entre une famille de fonctions L donnée et le groupe de matrice qui pourrait lui être associé. C'est l'objet de cette présentation, à travers les statistiques sur les zéros et les valeurs propres.

2. Statistiques et symétries sur les zéros et les angles propres

2.1. **Le cadre : matrices et fonctions L.** Nous gardons en vue le fort parallèle existant entre matrices et fonctions L, présentant les deux cadres et les résultats analogues dans chacun d'eux. À une matrice $A \in M_N(\mathbf{R})$ appartenant à l'un des sous-groupes classiques des $U(N)$, en particulier diagonalisables, on associe ses valeurs propres $\lambda_j = e^{i\theta_j}$ indexées de sorte à ce que $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \cdots \leqslant \theta_N < 2\pi$. L'espacement moyen entre voisins est donc $\frac{2\pi}{N}$, que l'on renormalise à 1 :

$$\tilde{\theta}_j := \frac{N}{2\pi}\theta_j$$

Pareillement, à une fonctions $L(s,\pi)$ on associe les zéros non triviaux $\rho_\pi^{(j)} = \frac{1}{2}\gamma_\pi^{(j)}$, avec a priori $\gamma_\pi^{(j)} \in \mathbf{C}$ si l'on ne suppose pas l'hypothèse de Riemann, et ordonnées de sorte que $\cdots \leqslant \Re\gamma_\pi^{(-1)} \leqslant 0 \leqslant \Re\gamma_\pi^{(1)} \leqslant \Re\gamma_\pi^{(2)} \leqslant \cdots$. L'espacement moyen est donné par Rudnick et Sarnak [20], $N_L(T) := \#\{\rho : |\gamma| \leqslant T\} \sim \frac{T\log T}{\pi}$, et l'on renormalise à 1 en posant :

$$\tilde{\gamma_j^\pi} := \frac{\log c(\pi)}{2\pi}\gamma_j^\pi$$

2.2. **Corrélations pour les matrices, des statistiques qui semblent universelles.** Wigner commence dans les années 50 à s'intéresser aux matrices aléatoires pour modéliser des phénomènes atomiques. Il s'agit des matrices de GUE, matrices unitaires à coefficients indépendamment donnés suivant des lois gaussiennes.

On s'intéresse à la répartition des écarts entre angles propres, en posant

$$R_2(A)[a,b] = \frac{1}{N}\{j \neq k \ : \ \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_j \in [a,b]\}$$

Dyson détermine la loi de distribution de ces écarts :

Theorem 1 (Dyson)**.** *Il existe une mesure $R_2(GUE)$ telles que pour toute famille de groupes classiques et pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ et $supp(\hat{\phi}) \subseteq]-2,2[$, on a*

$$\frac{1}{N}\sum_{j\neq k}\phi(\tilde{\gamma}_j - \tilde{\gamma}_k) \longrightarrow_{N\infty} \int_{\mathbf{R}}\phi(x)r_2(GUE)(x)dx$$

et de plus $R_2(GUE)[a,b] = \int_a^b r_2(GUE)(x)dx$ *où* $r_2(GUE)(x) = 1 - \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2$.

2.3. **Corrélations pour les fonctions** L. Montgomery [13] s'intéresse le premier des lois de distribution des espacements entre zéros de fonctions L, pour la fonction ζ, remarquant en 1974 que cette corrélation entre zéros était la même que celle des valeurs propres des matrices symétriques aléatoires $N \times N$.

Theorem 2 (Montgomery, 1974). *Pour* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ *et* $supp(\hat{\phi}) \subseteq]-1,1[$, *on a*

$$\frac{1}{N}\sum_{j\neq k}\phi(\tilde{\gamma}_j - \tilde{\gamma}_k) \longrightarrow_{N\infty} \int_{\mathbf{R}} \phi(x)\left(1 - \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)\right)dx$$

De nombreux calculs numériques menés par Odlyzko [14] ont, dès lors, confirmé que de nombreuses statistiques de zéros de fonctions L semblent suivre les statistiques analogues des angles propres des matrices aléatoires dans GUE. Ce comportement qui semble universellement parallèle à la GUE pour les espacements entre zéros de fonctions L est connu sous le nom de *loi de Montgomery-Odlyzko*. Plus généralement, on considère les n-corrélations entre zéros ou angles propres :

$$C_n(T,\phi) := \sum_{i_k \leqslant n} \phi(\tilde{\gamma_{i_1}}, \dots, \tilde{\gamma_{i_n}})$$

où ϕ est symétrique, rapidement décroissante et est une fonction des *différences* $\gamma_{i_k} - \gamma_{i_l}$, plus explicitement $\phi(x + t(1,\dots,1)) = f(x)$.

Les résultats se généralisent alors peu à peu :

- ⋆ Hejhal prouve en 1994 que la 3-corrélation des zéros de ζ converge vers GUE
- ⋆ Rudnick et Sarnak [20] prouvent en 1995 la même convergence pour les n-corrélations des zéros de toute fonction $L(s,\pi)$ pour π contragrédiente d'un $GL(M)$
- ⋆ Katz et Sarnak [9] prouvent en 1997 que les valeurs propres de matrices aléatoires d'un groupe de Lie symétrique irréductible compact (qui sont les groupes dits « classiques ») convergent vers GUE :

Theorem 3 (Katz-Sarnak). *Il existe une mesure* $R_2(GUE)$ *telles que pour toute famille de groupes classiques et pour* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ *et* $supp(\hat{\phi}) \subseteq]-2,2[$, *on a*

$$\frac{1}{N}\sum_{j\neq k}\phi(\tilde{\gamma}_j - \tilde{\gamma}_k) \longrightarrow_{N\infty} \int_{\mathbf{R}} \phi(x) r_2(GUE)(x)dx$$

et de plus $R_2(GUE)[a,b] = \int_a^b r_2(GUE)(x)dx$ *où* $r_2(GUE)(x) = 1 - \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2$.

Firk et Miller [5] donnent des arguments sur l'apparition universelle du noyau de distribution GUE dans la modélisation des statistiques en physique. Les résultats mentionnés suggèrent la même universalité pour les statistiques sur les fonctions L.

2.4. **Densité et variabilité du type de symétrie, le cadre matriciel.** Les résultats précédents ont de décevant qu'ils sont aveugles aux différences entre les groupes classiques, et l'on peut espérer, contre la loi de Montgomery-Odlyzko, que d'autres statistiques y seront sensibles et permettront de les discriminer. Les statistiques de corrélation considérées jusqu'alors sont des statistiques sur *tous* les zéros ou angles propres, puisqu'on ne regarde que les espacements. Nous nous concentrons désormais sur les statistiques portant sur les *petits* zéros et les *petits* angles propres, ce que l'on appelle les n-densités :

$$D_n(T,\phi) := \sum_{i_k \leqslant n} \phi(\tilde{\gamma_{i_1}}, \dots, \tilde{\gamma_{i_n}})$$

où ϕ est cette fois quelconque, et non une fonction des différences : on tronque donc les grands zéros ou angles propres.

Pour les matrices, Katz et Sarnak ont prouvé que ces densités moyennes ont toujours pour limites l'une des suivantes :

Theorem 4 (Katz-Sarnak, [9]). *Pour les groupes classiques $G(N)$, on a*

$$\lim_{N\infty} \int_{G(N)} \frac{1}{N} \sum_j \phi(\tilde{\theta}_j) dA = \int_{\mathbf{R}_+^n} W_G^{(n)}(x)\phi(x)dx$$

où dA est la mesure de Haar sur $G(N)$, et la fonction de distribution est :

Groupe	*Fonction de densité*
$U(N)$	1
$USp(N)$	$1-\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}$
$SO(2N), O^-(2N+1)$	$1+\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}$
$SO(2N+1), O^-(2N)$	$1-\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}$

Cette fonction W_G^n est la fonction de densité de niveau n pour le groupe $G(N)$. De manière générale elle s'exprime comme un déterminan de Fredholm, typique des constructions en théorie des matrices aléatoires [12]. Le fait de ne pas avoir une limite universelle mais dépendante de ces groupes classiques permet de définir des "types de symétrie", et le calcul de la limite de ces distributions permet donc de détecter quel est le groupe qui régit le comportement d'une famille de fonctions L. Notons que le résultat est vrai pour les groupes classiques, il reste à savoir s'il est vrai pour toute « bonne » famille de groupes, ce qui ferait de ces groupes classiques les représentants « universels » des différents types de symétrie.

2.5. **Les densités pour les fonctions L.** Plutôt que d'étudier les répartitions des zéros d'une seule fonction L, on peut s'intéresser à toute une famille de fonctions L. Si une définition générale peut être donnée [10], il faut penser à ces familles comme celles qui émergent naturellement d'autres familles d'objets [19] : courbes elliptiques, formes automorphes à composantes locales répondant à des contraintes, fonctions L provenant de variétés algébriques, ou encore transfert fonctoriel de tout groupe réductif.

Analoguement aux résultats matriciels, on peut imaginer que toute « bonne » famille de fonction L voit ses statistiques converger vers celles de ces groupes classiques, et peut donc être associée en terme de « symétrie » à ce groupe. Les résultats obtenus en ce sens sont récents, et l'on s'intéresse au cas de la famille des fonctions L de Dirichlet associées aux caractères quadratiques primitifs. Le premier résultat est prouvé par Ozlük et Snyder [15] en 1993 :

Theorem 5. *Si ϕ est une fonction paire sur $\mathbf{R}$ admettant une transformée de Fourier supportée dans $[-2/3, 2/3]$, et si $\int_{\mathbf{R}} \alpha\phi(\alpha)d\alpha$ converge, alors il existe une constante K telle que*

$$\lim_{D\infty} \frac{1}{D} \sum_{d\in\mathcal{F}(D)} \sum_{\rho(d)} \phi(\tilde{\gamma}) = K \int_{\mathbf{R}} \left(1-\frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi\alpha}\right)\phi(\alpha)d\alpha$$

À mettre en parallèle du résultat du groupe symplectique, prouvé dans l'annexe A :

$$\lim_{N\infty} \int_{Sp(N)} \frac{1}{N} \sum_j \phi(\tilde{\theta}_j) dA = \int_{\mathbf{R}} \left(1-\frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi\alpha}\right)\phi(\alpha)d\alpha$$

de sorte que, statistiquement sur les petits zéros, la famille de fonctions L considérée se comporte de la même manière que le groupe symplectique.

On conjecture que la convergence des distributions demeure pour toute fonction-test, sans hypothèse sur le support de Fourier. Il est important de comprendre en quoi la quête vers de grands supports de Fourier continue : ϕ et $\hat{\phi}$ ne peuvent être toutes les deux à supports compacts à moins d'être nulles. Ce qui nous intéresse dans les statistiques, ce sont les petits zéros, autrement dit les fonctions ϕ rapidement décroissantes, ce qui correspond à des transformées de Fourier à grands supports, justifiant la recherche de résultats sur des supports les plus grands possibles. En 1987, Montgomery et Goldston relient les résultats sur la corrélation par paires de zéros de la fonction ζ et la variance des nombres premiers dans de petits intervalles.

Nous nous intéressons ici au seul cas de la 1-densité non seulement pour des raisons techniques qui ne cachent pas le coeur des preuves, mais aussi parce que si le type de symétrie existe effectivement de manière universelle, la seule détermination de la loi de 1-densité permet déjà de le discriminer.

3. Le cas des torsions quadratiques et la symétrie symplectique

3.1. **Aperçu des résultats.** L'histoire de l'étude du type de symétrie de cette famille est assez rocambolesque :

- ⋆ Ozlük et Snyder [15] prouvent en 1993 la convergence de la 1-densité vers la distribution du groupe symplectique, pour des fonctions-test de support inclus dans $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$
- ⋆ Rubinstein [17, 18] étend le résultat en 1998 à la n-densité pour tout n, pour des fonctions-test de support inclus dans $B_1(0,1)$
- ⋆ Gao [6] étend en 2005 l'hypothèse sur le support à $B_1(0,2)$ sans toutefois réussir à vaincre la lourde combinatoire apparaissant dans la distribution limite, ne le vérifiant que pour $n \leqslant 3$
- ⋆ le résultat est enfin prouvé en 2013, par Entin, Roditty-Gershon et Rudnick [3]
- ⋆ Fiorilli, Parks et Södergren [4] proposent en 2016 une explication quantitative de la dffi-culté du passage de 1 dans l'extension du support de Fourier, donnant un développement asymptotique à tout ordre de la densité

Ces résultats sont systématiquement le résultat d'élégantes manipulations combinatoires et intégrales, et d'accumulations d'estimations assez fines à partir de formules explicites. Toutefois, ces preuves sont aussi une obstruction à la compréhension des liens qui existeraient entre nombres premiers et spectres d'opérateurs.

3.2. **Le résultat de Rubinstein.** Les caractères quadratiques sont tous exprimables par le symbole de Kronecker $\chi_d = \left(\frac{d}{\cdot}\right)$. On se limite aux caractères primitifs, ceux qui sont associés à des $d \in D$ discriminants fondamentaux, [2] qui sont les produits de facteurs parmi $\{-4, 8, -8, (-1)^{(p-1)/2}p\}$, et on note $D(X) = \{d \in D \ : \ X/2 \leqslant X/2 \leqslant |d| \leqslant X\}$.

Theorem 6 (Rubinstein, [18]). *Pour $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ bornée, mesurable et à support compact inclus dans $B_1(0,1)$, on a*

$$\frac{1}{|D(X)|} \sum_{d \in D(X)} \sum_j \phi(\tilde{\gamma_d^{(j)}}) \longrightarrow_{N\infty} \int_{\mathbf{R}} \phi(x) W_{USp}(x) dx$$

Nous présentons ici les arguments dans le cas $n = 1$ et $K = \mathbf{Q}$, ce qui met de côté bien des difficultés techniques mais occulte aussi une élégante combinatoire. Le théorème reste valable pour la n-densité, $n \geqslant 1$, et pour les torsions quadratiques des fonctions L sur $GL(M)$, i.e. pour la famille des $L(s, \pi \otimes \chi_d)$ avec π forme automorphe contragrédiente de $GL(M)$, et également pour des torsions d'ordres supérieurs.

Comme pour la version matricielle du théorème, il s'agit d'une statistique portant sur les zéros de petite partie imaginaire, *i.e.* proches de l'axe réel.

Proof. On part d'une formule explicite pour exprimer la distribution sur les zéros [2] :

$$\sum_j f(\tilde{\gamma}_d^{(j)}) = \int_{\mathbf{R}} f(x) dx - \frac{2}{\log X} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{m^{1/2}} \chi_d(m) \hat{f}\left(\frac{\log m}{\log X}\right) + O(1/\log X)$$

puis, en sommant sur $d \in D(X)$ pour obtenir la statistique qui nous intéresse, on obtient un terme constant qui ne bouge pas du fait de la normalisation de la somme, un reste qui demeure négligeable, et un dernier terme :

$$A = -\frac{2}{\log X}\frac{1}{|D(X)|}\sum_{d\in D(X)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Lambda(m)}{m^{1/2}}\chi_d(m)\hat{f}\left(\frac{\log m}{\log X}\right)$$

Le reste de la preuve consiste en montrer que parmi les entiers intervenant dans cette somme, la contribution des non carrés est négligeables, et à expliciter le terme principal provenant de la somme sur les carrés.

Lemma 1 (Contribution des non-carrés)**.**

$$\lim_{X\infty}\frac{1}{|D(X)|}\sum_{d\in D(X)}\frac{-2}{\log X}\sum_{m=\not\square}\frac{\Lambda(m)}{m^{1/2}}\chi_d(m)\hat{f}\left(\frac{\log m}{\log X}\right)=0$$

Proof. Si on note $\alpha = \sup supp\hat{\phi}$, alors $\hat{\phi}(\frac{\log m}{\log X}) \neq 0$ pour $\frac{\log m}{\log X} \leqslant \alpha$ *i.e.* $m \leqslant X^{\alpha}$. Par Cauchy-Schwarz, il vient alors

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|D(X)|}\sum_{d\in D(X)}\frac{-2}{\log X}\sum_{m=\not\square}\frac{\Lambda(m)}{m^{1/2}}\chi_d(m)\hat{f}\left(\frac{\log m}{\log X}\right)\\
&=\frac{1}{|D(X)|}\frac{-2}{\log X}\sum_{m=\not\square}\left(\frac{\Lambda(m)}{m^{1/2}}\right)\left(\sum_{d\in D(X)}\chi_d(m)\hat{\phi}\left(\frac{\log m}{\log X}\right)\right)\\
&\ll\frac{1}{|D(X)|}\frac{1}{\log X}\underbrace{\left(\sum_{m\leqslant X^{\alpha}}\frac{\Lambda^2(m)}{m}\right)^{1/2}}_{C}\underbrace{\left(\sum_{m\leqslant X^{\alpha}}\left|\sum_{d\in D(X)}\chi_d(m)\right|^2\right)^{1/2}}_{D}
\end{aligned}$$

On a alors les estimations suivantes :

- ⋆ $C \ll \log^2 X$ par les estimations de Mertens [**?**]
- ⋆ $D \ll X^{1+\alpha}\log^A X$ par Jutila [8]

Ainsi, on obtient $A \ll \frac{1}{|D(X)|}X^{\frac{1+\alpha}{2}}$, qui tend vers 0 dès que $\alpha < 1$. C'est ici que le support de ϕ est contraint. □

Lemma 2 (Contribution des carrés)**.**

$$\lim_{X\infty}\frac{1}{|D(X)|}\sum_{d\in D(X)}\frac{-2}{\log X}\sum_{m=\square}\frac{\Lambda(m)}{m^{1/2}}\chi_d(m)\hat{\phi}\left(\frac{\log m}{\log X}\right)=-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\hat{\phi}(u)du$$

Proof. Puisque m est un carré, $\chi_d(m) = 1$. Du fait de la présence de la fonction de van Mangoldt, m doit être une puissance de nombre premier carrée, p^{2k}. Il suit de cela

$$\sum_{d\in D(X)}\sum_{m=\square}\frac{\Lambda(m)}{m^{1/2}}\chi_d(m)\hat{\phi}\left(\frac{\log m}{\log X}\right)=\sum_{d\in D(X)}\sum_{p}\frac{\log p}{p^k}\hat{\phi}\left(\frac{2k\log p}{\log X}\right)$$

Puis, par intégration par parties, en cherchant à faire apparaitre une somme de $\frac{\log p}{p}$ que l'on sait bien estimer par Mertens :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log X}\sum_p \frac{\log p}{p^k}\hat{\phi}\left(\frac{2k\log p}{\log X}\right) &= \frac{1}{\log X}\int_1^\infty \left[\sum_{p\leqslant t}\frac{\log p}{p^k}\right]\hat{\phi}\left(\frac{2k\log t}{\log X}\right)' dt \\ &= \frac{1}{\log X}\int_1^\infty (\log t + O(1))\hat{\phi}\left(\frac{2\log t}{\log X}\right)' dt \\ &= \frac{1}{\log X}\int_1^\infty \hat{\phi}\left(\frac{2\log t}{\log X}\right)\frac{dt}{t} + O(1/\log X) \\ &\underset{u=2\log t/\log X}{=} -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\hat{\phi}(u)du\end{aligned}$$

Ainsi, la contribution asymptotique est nulle pour tous les $k \geqslant 2$, seule reste celle correspondant aux $m = p^2$:

$$\frac{1}{|D(X)|}\sum_{d\in D(X)}\sum_j f(\tilde{\gamma}_d^{(j)}) = \int_{\mathbf{R}} f(x)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\hat{\phi}(u)du$$

Il reste à travailler un peu le membre de droite du théorème. En ne considérant que la partie avec les sinus, l'intégrale vaut $\frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(u)$, ce qui permet de calculer la transformée de Fourier $\hat{W}_-$:

$$\int_{\mathbf{R}} W_-(x)e^{2i\pi ux}dx = \delta(u) - \frac{1}{2}, \forall |u| < 1$$

Puis par la formule de Parseval, *i.e.* par symétrie de la transformation de Fourier :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} f(x)W_-(x)dx &= \int_{\mathbf{R}}\hat{\phi}(u)\left(\delta(u) - \frac{1}{2}\right)du \\ &= \int_{\mathbf{R}}\hat{\phi}(u)\delta(u) - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\hat{\phi}(u)du \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(x)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\hat{\phi}(u)du\end{aligned}$$

qui est bien le terme trouvé en développant asymptotiquement la formule explicite initiale. □

L'extension par Gao [6] du support de Fourier jusqu'à 2 se base sur deux ingrédients : l'utilisation de la formule de Poisson lors des estimations sur les sommes de non carrés, permettant d'étendre le support de Fourier jusqu'à 2 ; et l'utilisation de GRH pour les estimations de ce terme.

3.3. **Des résultats récents sur le passage de 1.** En 2014 et 2016, Fiorilli, Parks et Södergren [4] obtiennent non seulement la loi de distribution limite, mais un développement asymptotique à tout ordre de la densité de la famille des caractères quadratiques, en puissances décroissantes de $\log X$. Celle-ci ale mérite de faire apparaître les valeurs en 1 de $\hat{\phi}$ et de ses dérivées successives, justifiant formellement la difficulté depuis Montgomery à augmenter le support de $\hat{\phi}$ au-delà de 1 :

Theorem 7 (Fiorilli, Parks et Södergren [4], 2016). *Sous GRH, pour toute $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ avec supp$\hat{\phi} \subseteq]-2, 2[$, on a*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \frac{1}{|D(X)|} \sum_{d \in D(X)} \sum_j f(\tilde{\gamma}_d^{(j)}) = \int_{\mathbf{R}} \phi(x) d\mu_{Sp}(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k(\phi)}{\log^k X} + O(\frac{1}{\log^{n+1} X})$$

où les $R_k(\phi)$ sont explicites et font intervenir les valeurs en 0 et en 1 de ϕ.

Annexe A. Le type de symétrie du groupe symplectique

Nous donnons les calculs permettant d'aboutir à la densité définissant le type de symétrie du groupe symplectique, que l'on retrouvera pour notre amille de fonctions L :

Theorem 8 (Katz-Sarnak). *Pour $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ bornée, mesurable et à support compact, on a*

$$\lim_{N\infty} \int_{Sp(N)} \frac{1}{N} \sum_j \phi(\tilde{\theta}_j) dA = \int_{\mathbf{R}} \left(1 - \frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi\alpha}\right) \phi(\alpha) d\alpha$$

Proof. On a

$$\begin{aligned}
W(f, G(N)) &= \int_{USp(N)} W(f, A, USp(N)) dA && \text{par définition} \\
&= \int_{USp(N)} H(A, f) dA && \text{par définition} \\
&= \int_{USp(N)} \sum_j f(\tilde{\theta}_A^{(j)}) dA && \text{par définition} \\
&= \int_{USp(N)} f_{USp(N)}[N] dA && \text{par définition} \\
&= \int_0^{\pi} f_{USp(N)}[N] d\mu(G(N)) && \text{par changement de variables} \\
&= \int_0^{\pi} f(x) L_N(x, x) \det(...) dx && \text{par la formule de Weyl} \\
&= \int_0^{\infty} f(x) L_N(x, x) \det(...) dx && \text{par compacité du support} \\
&\longrightarrow_{N\infty} \int_0^{\infty} W_{USp(N)}(x) f(x) dx && \text{par convergence simple}
\end{aligned}$$

Les classes de conjugaison sont paramétrées par $T = [0, \pi]$, sur lequel on met la mesure de Weyl $d\mu(x) = \frac{2}{\pi} \sin^2(x) dx$. Le changement de variables et la formule d'intégration de Weyl viennent de la paramétrisation des caractères irréductibles de $USp(2) = SU(2)$: ce sont les $Sym^{n-1}(std)$, de caractères $\frac{\sin(nx)}{\sin(x)}$, qui sont des fonctions orthogonales pour $d\mu$. On obtient alors par trigonométrie que

$$L_N = 2\sin(x)\sin(y) K_N = \sum 2\sin(nx)\sin(ny)$$

Parmi les différents types de symétrie, $USp(N)$ est le seul des sous-groupes classiques à avoir une densité de répartition des valeurs propres nulle en 1 : c'est une valeur propre répulsive.

Références

[1] Nicolas Bergeron. *Le spectre des surfaces hyperboliques*. EDP Sciences, 2011.

[2] Harold Davenport. Multiplicative Number Theory. pages 1–188, March 2013.

[3] Alexei Entin, Edva Roditty-Gershon, and Zéev Rudnick. Low-lying Zeros of Quadratic Dirichlet L-Functions, Hyper-elliptic Curves and Random Matrix Theory. *Geometric and Functional Analysis*, 23(4) :1230–1261, June 2013.

[4] Daniel Fiorilli, James Parks, and Anders Södergren. Low-lying zeros of quadratic Dirichlet L-Functions : Lower order terms for extended support. pages 1–19, January 2016.

[5] Frank W K Firk and Steven J Miller. Nuclei, Primes and the Random Matrix Connection. *Symmetry*, 1(1) :64–105, September 2009.

[6] Peng Gao. *n-Level Density of the Low-lying Zeros of Quadratic Dirichlet L-functions*. PhD thesis, University of Michigan, October 2005.

[7] Stephen Gelbart. An Elementary Introduction to the Langlands Program. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 10 :1–44, April 1994.

[8] M Jutila. On the Mean Value of L(1/2,χ) FW Real Characters. *Analysis*, 1(2) :149–161, January 1981.

[9] Nicholas M Katz and Peter Sarnak. Zeroes of Zeta Functions and Symmetry. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 36 :1–26, January 1999.

[10] Emmanuel Kowalski. Families of Cusp Forms. pages 1–35, February 2013.

[11] Barry Mazur and William Stein. How explicit is the Explicit Formula ? pages 1–40, March 2013.

[12] Madan Lal Mehta. *Random Matrices*. January 2004.

[13] H L Montgomery. The Pair Correlation of Zeros of the Zeta Function. *Bull. Amer. Math. Soc.*, pages 1–13, January 1993.

[14] A M Odlyzko. On the Distribution of Spacings Between Zeros of the Zeta Function. *Mathematics of Computation*, 48(177) :273–308, January 1987.

[15] Ali E Özlük and C Snyder. Small zeros of quadratic L-functions. *Bull. Austral. Math. Soc.*, pages 1–13, January 1993.

[16] Matthew r. Watkins. Selberg trace formula and zeta functions. http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/physics4.htm. Accessed : 2016-02-08.

[17] Michaël Rubinstein. *Evidence for a Spectral Interpretation of the Zeros of L-Functions*. PhD thesis, Princeton University, April 1998.

[18] Michaël Rubinstein. Low-lying zeros of L -functions and random matrix theory. *Duke Mathematical Journal*, 109(1) :147–181, July 2001.

[19] Peter Sarnak. Definition of Families of L-functions. pages 1–9, January 2008.

[20] Peter Sarnak and Zéev Rudnick. Zeros of Principal L-functions and Random Matrix Theory. pages 1–54, June 1995.

[21] André Weil. Sur les "formules explicites" de la théorie des nombres premiers. pages 1–15, January 1952.