VOLUMES LOCAUX ET GLOBAUX DE GROUPES FUCHSIENS QUATERNIONIQUES

DIDIER LESESVRE

Table des matières

Résumé

Les comptages dans l'esprit du programme de Manin-Peyre font intervenir une constante dont une partie est un volume global : c'est là ce qui nous intéresse. Quelques rappels sur les quaternions et les adèles permettent d'énoncer l'objectif : calculer le covolume de ce type de groupes, plus précisément les groupes fuchsiens associés aux ordres maximaux d'algèbres de quaternions. Nous commençons par définir de bonnes mesures sur ces constructions, d'abord sur les corps locaux, de sorte à simplifier l'analyse de Fourier. Cela nous permet, en calquant la preuve classique de l'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Riemann, d'exhiber un lien entre volume global et résidus de fonctions spéciales. Nous en tirons un rapport entre les volumes globaux et les volumes locaux, plus simples à calculer et qui nous permettent d'obtenir quelques covolumes de groupes fuchsiens ainsi que les aires des surfaces hyperboliques associées.

Notations

X corps ou une algèbre de quaternion, sur un corps local ou global
$X_K = X$ est K ou une algèbre de quaternions H sur K, X_A adèles sur X
X_1 éléments de X de module 1
X_A^1 éléments de X de norme réduite 1
$X^\star = X^\times$ inversibles de X
dx_v et $dx_v^\star$ mesures de Haar locales
dx_A et $dx_A^\star$ mesures de Haar adéliques
dx_v^T et $dx_{\mathbf{A}}^T$ mesures additives de Tamagawa locale et globale
R anneau des entiers de K et π une uniformisante, dans le cas où $K' \neq \mathbf{R}$
$\mathcal{O}$ un ordre maximal de X, dans le cas où $K' \neq \mathbf{R}$
$q = Np$ le cardinal du corps résiduel $R/R\pi$

Date: 26 novembre 2014. Notes rédigées pour un exposé donné à l'occasion du groupe de travail de théorie des nombres organisé par Étienne Fouvry à Orsay.

Introduction

Le théorème de Schanuel donne un équivalent du nombre de points rationnels de hauteur bornée dans l'espace projectif $\mathbf{P}^d$:

$$\#\{x \in \mathbf{P}^d(F) \ : \ H(x) \leqslant Q\} \sim C_{\mathbf{P}^d} Q^{d+1}$$

Une fois déterminée cette loi de croissance, l'objectif est de comprendre la constante $C_{\mathbf{P}^d}$. Emmanuel Peyre conjecture que pour une famille plus générale de variétés, dites de Fano, le résultat de Schanuel et l'interprétation de la constante se généralisent [Peyre, 1995] :

$$\#\{x \in V \ : \ H(x) \leqslant Q\} \sim C_V Q^{d+1}$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad C_V &= \alpha_V \tau(V) \quad \alpha_V \in \mathbf{Q} \\ \tau(V) &= \lim_{s \to 1} (s-1)\zeta_F(s)\omega(V) \\ \omega(V) &= \prod_v \lambda_v^{-1} \omega_v(V) \\ \omega_v(V) &= \mathrm{vol}_v(V) \quad \text{pour une certaine mesure} \end{aligned}$$

Ainsi, le calcul de volumes globaux est l'un des problèmes centraux dans la compréhension de ces lois de comptage. On peut naturellement conjecturer, compte tenu des fortes analogies existant entre points rationnels de variétés et formes cuspidales, qu'on a de même

$$\#\{\pi \in A_{cusp}(G) \ : \ c(\pi) \leqslant Q\} \sim C_G Q^{d+1}$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad C_G &= \alpha_G \tau(G) \quad \alpha_V \in \mathbf{Q} \\ \tau(G) &= \lim_{s \to 1} (s-1)\zeta_A(s)\omega(\widehat{G}) \\ \omega(\widehat{G}) &= \prod_v \lambda_v^{-1} \omega_v(\widehat{G_v}) \\ \omega_v(\widehat{G_v}) &= \mathrm{vol}_v(\widehat{G_v}) \quad \text{pour une certaine mesure} \end{aligned}$$

pour G groupe des unités d'une algèbre centrale simple $A = M_d(D)$. Ce sont les volumes globaux dans ce cadre-ci qui nous intéressent.

Les calculs de volumes interviennent dans plusieurs autres situations, par exemple

- ⋆ calculs intégraux
- ⋆ problèmes de comptage
- ⋆ formules de traces, dans le terme correspondant à l'identité

C'est un problème difficile : les expressions intégrales sont souvent impossibles à évaluer et à manipuler, faute de paramétrage simple. Déjà, l'explicitation d'un domaine fondamental « simple » n'a pas de solution systématique. Notre objectif est de comprendre comment, dans le cas de groupes fuchsiens quaternioniques, *i.e.* dans le cadre des algèbres centrales simples de dimension 4, accéder à ces volumes. Se pose notamment la question du rapport entre le volume d'un groupe construit sur un corps global et ceux des groupes locaux correspondants, ces derniers étant plus simples à calculer.

Bref historique

Calculs locaux de Eichler dans le cas des algèbres de quaternions

Mesures de Tamagawa par Weil et calculs pour des algèbres centrales simples plus générales

Calcul globaux par Borel

1. Les algèbres de quaternions et leurs adèles

On rappelle ici les définitions et résultats utiles concernant les quaternions et les constructions adéliques.

1.1. **Algèbres de quaternions et propriétés.**

Définition 1.1. Une algèbre de quaternions est une algèbre centrale simple de dimension 4.

En pratique, les algèbres de quaternions s'appréhendent par la représentation suivante :

Théorème 1.1. *Une algèbre de quaternions sur K en caractéristique différente de 2 est isomorphe à*

$$D_{a,b}(K) := \langle 1, i, j, k \rangle_K \quad \text{où} \quad i^2 = a, j^2 = b, k = ij = -ji$$

On définit alors le conjugué, la norme et la trace des quaternions comme habituellement :

$$\begin{aligned} h &= x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3 \\ \overline{h} &= x_0 - ix_1 - jx_2 - kx_3 \\ Tr(h) &= h + \overline{h} = 2x_0 \\ n(h) &= h\overline{h} = x_0^2 - aX_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2 \end{aligned}$$

Les algèbres de quaternions se réalisent comme algèbres de matrices :

Théorème 1.2. *En caractéristique différente de 2, on a l'homéomorphisme suivant, qui respecte la norme et la trace :*

$$\begin{array}{llll} \Phi: & A & \longrightarrow & M_2\left(F(\sqrt{a})\right) \\ & 1 & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \\ & i & \mapsto & \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix} \qquad k \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a} \\ -b\sqrt{a} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Théorème 1.3. *Une algèbre de quaternions est soit à division, auquel cas on dit qu'elle est ramifiée, soit isomorphe à $M_2(K)$, auquel cas on dit qu'elle est déployée. Sur un corps local, il n'y a qu'une seule algèbre de quaternions à division à isomorphisme près.*

Preuve. Il s'agit de [Maclachlan and Reid, 2003, Théorème 2.6.3], qui plus généralement affirme qu'une algèbre centrale simple est isomorphe à un $M_n(D)$ où D est une algèbre à division déterminée à isomorphisme près. □

Théorème 1.4. *Les places ramifiées d'une algèbre de quaternion sont en nombre fini et pair.*

Preuve. C'est le [Maclachlan and Reid, 2003, Théorème 2.7.3].

Dans la suite, dans le cas des places finies, nous considérons un ordre $\mathcal{O}$ de A, *i.e.* un R-réseau qui est un anneau, qui est maximal parmi les ordres.

1.2. **Adèles & Idèles.** On note X pour K ou H une algèbre de quaternions sur K. Les adèles sont un formalisme permettant d'embrasser toutes les propriétés analytiques locales, *i.e.* toutes les complétions possibles, d'une algèbre donnée :

Définition 1.2. L'anneau des adèles de $X_{\mathbf{A}}$, X étant K ou une algèbre de quaternions, est le produit restreint des X_v relativement aux $\mathcal{O}_v$, *i.e.*

$$X_A = \left\{ (x_v)_v \in \prod_v X_v \ : \ \tilde{\forall} v, x_v \in \mathcal{O}_v \right\}$$

Il est muni de la topologie produit restreint, dont une base d'ouverts est formée des

$$\prod_v U_v$$

où U_v est un ouvert de X_v, presque toujours égal à $\mathcal{O}_v$.

Théorème 1.5. *X_K est discret et cocompact dans X_A.*

Preuve. Dire que X_K est discret dans X_A signifie, comme pour tout groupe topologique, que zéro est isolé, *i.e.* qu'il n'admet pas de point d'accumulation. Si on prend un voisinage du type

$$V = U \star \prod_p \mathbf{Z}_p$$

où U est un produit restreint de voisinages archimédiens, alors un élément doit être entier aux places finies, donc entier ; et proche de 0 dans $\mathbf{Z}$ au sens archimédien, donc nul. Quant à la compacité, le dual de X_A/X_K est X_K, c'est donc le groupe dual d'un groupe discret.

Théorème 1.6. *H_v^1 est compact si, et seulement si, v est ramifiée dans H.*

Preuve. Dans le cas d'un corps, le théorème de Fujisaki [Vignéras, 1980, Théorème III.1.4] garantit que H_v^1 est compact. Dans le cas de $M_2(K_v)$, $H_V^1 = SL_2(K_v)$ n'est pas compact, par exemple par surjectivité de la norme dans $K_v^\star$. □

On s'intéresse désormais aux produits restreints de tels groupes, notamment aux facteurs de la forme $H_S^1 = \prod_{v \in S} H_v^1$.

Théorème 1.7. *H_S^1 est compact si, et seulement si, toutes les places de S sont ramifiées dans H.*

Preuve. Les adèles sont munies de la topologie produit restreint, ce qui fait que H_S^1 est compact si, et seulement si, chacun de ses facteurs l'est. Par le résultat qui précède, cela se produit exactement quand toutes les places de S sont ramifiées dans H. □

Ces résultats permettent de savoir quand appliquer le résultat d'approximation suivant :

Théorème 1.8 (Approximation forte)**.** *Si H_S^1 n'est pas compact dans $H_{\mathbf{A}}^1$, alors $H_S^1 H_K^1$ est dense dans $H_{\mathbf{A}}^1$.*

Preuve. [Maclachlan and Reid, 2003, Théorème 7.5.5] □

2. Mesures de Haar et volumes locaux

Avant de pouvoir parler de volumes et d'intégration, il faut fixer des mesures sur les espaces. Puisque X_v et $X_v^\star$ se plongent homéomorphiquement en dimension finie *via* l'isomorphisme usuel $D_{a,b}(K) \cong M_2(K(\sqrt{a}))$, ils sont localement compacts. Il existe donc des mesures de Haar sur chacun d'eux, définies à constante multiplicative près : il reste à déterminer ces constantes. De manière à pouvoir construire les mesures multiplicatives (sur $X^\star$) à partir des mesures additives (sur X), on introduit les modules :

2.1. **Les mesures de Haar locales.**

Définition 2.1. Une mesure étant donnée, le module d'un isomorphisme a d'un groupe localement compact G est donné par $\|a\| = d(ag)/dg$ où la mesure $d(ag)$ est définie par

$$\int_G f(g)dg = \int_G f(ag)d(ag)$$

Les résultats et propriétés utiles sur les modules d'isomorphismes sont de [Weil, 1967, ch. 1], on retiendra surtout la multiplicativité.

Théorème 2.1. *Le module d'un élément $x \in X^\star$ est l'inverse de sa norme $N_X(x)$. Nous prenons ce résultat comme définition, plus généralement, de la norme d'un isomorphisme.*

Preuve. Cela vient juste de ce que, par définition, $\|x\|\mathrm{vol}(O) = \mathrm{vol}(xO)$, donc $\|x\| = \#(O/Ox)^{-1} = N(x)^{-1}$. □

On normalise les mesures de sorte que :

Définition 2.2. La mesure de Haar additive est donnée par

$$dx_H = \begin{cases} \mathrm{vol}(O) = 1 & \text{si } \mathbf{R} \not\subset H \\ \prod_i dx_i & \text{si } \mathbf{R} \subset H \end{cases}$$

On note vol_+ les volumes associés. Les mesures de Haar multiplicatives sont données par

$$dx_H^\star = \begin{cases} (1-q^{-1})^{-1}\|x\|_H^{-1} dx_H = 1 & \text{si } \mathbf{R} \not\subset H \\ \|x\|_H^{-1} dx_H & \text{si } \mathbf{R} \subset H \end{cases}$$

On note $\mathrm{vol}_\star$ les volumes associés.

En particulier, lorsque $\mathbf{R} \not\subseteq X$ et que tous les éléments sont unimodulaires, on obtient que $\mathrm{vol}_\star = (1-q^{-1})^{-1}\mathrm{vol}_+$, permettant de relier les calculs de volumes multiplicatifs et additifs. On connait alors des volumes élémentaires pour ces mesures de Haar :

Théorème 2.2. *Dans le cas $\mathbf{R} \not\subset H$, si O désigne un ordre maximal normalisant la mesure, on a*

$$\begin{aligned} vol_\star(R^\star) &= 1 \\ vol_\star(O^\star) &= (1-q^{-1})^{-1}(1-q^{-2}) \\ vol_\star(GL_2(K)) &= 1-q^{-2} \end{aligned}$$

Preuve. Dans le cas de X corps, O est un anneau à valuation discrète et admet donc un unique idéal maximal $M = Ox$, ce qui fait que :

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_+ O^\star &= \mathrm{vol}_+ O - \mathrm{vol}_+ Ox \\ &= 1 - \|x\| \\ &= 1 - N(x)^{-1} \\ &= 1 - N_X(Ox)^{-1} \\ &= 1 - card(O/Ox)^{-1} \end{aligned}$$

d'où $\mathrm{vol}_\star(R^\star) = (1-q^{-1})^{-1}\mathrm{vol}_+(R^\star) = 1$ si $X = K$ et donc $O = R$, car on a $N(x) = N(\pi) = q^{-1}$; et $\mathrm{vol}_\star(O^\star) = (1-q^{-1})^{-1}\mathrm{vol}_+(O^\star) = (1-q^{-1})^{-1}(1-q^{-2})$ dans le cas où $X = H$, car on a $N(x) = N(\pi) = q^{-2}$.

Dans le cas de $H = M_2(K)$, *i.e.* pour le volume de $GL_2(R)$, on fait de même avec le dévissage – méthode souvent utile pour la décomposition de volumes, voir l'énoncé précis en annexe – donné par la suite exacte

$$1 \longrightarrow K(\pi) \longrightarrow GL_2(R) \longrightarrow GL_2(k = R/R\pi) \longrightarrow 1$$

où $K(\pi) = Ker(proj_\pi) = I + \pi M_2(R) \cong (R\pi)^4$. Sur le groupe discret $GL_2(k)$ on fixe la mesure de comptage, d'où

$$\mathrm{vol}_+(GL_2(R)) = \mathrm{vol}_+(GL_2(k))\mathrm{vol}_+(K(\pi)) = \mathrm{vol}_+(R\pi)^4 card(GL_2(k))$$

Le volume de $R\pi$ a été obtenu par les normalisations $\mathrm{vol}_+(R) = 1$, $card(R/R\pi = k) = q$ qui donne $\mathrm{vol}_+(R\pi) = q^{-1}$ grâce à la suite exacte

$$1 \longrightarrow R\pi \longrightarrow R \longrightarrow R/R\pi \longrightarrow 1$$

Le cardinal de $GL_2(k)$ est classiquement $(q^2-1)(q^2-q)$. On obtient ainsi le volume multiplicatif voulu en multipliant par $(1-q^{-1})^{-1}$, $GL_2(R)$ étant un groupe unimodulaire, car discret. □

2.2. **Les mesures de Tamagawa.** Pour simplifier les formules obtenues par la théorie de Fourier, nous introduisons naturellement

Définition 2.3. La mesure de Tamagawa pour X (resp. $X^\star$) est la mesure de Haar autoduale sur X (resp. $X^\star$) pour le caractère canonique, défini par

$$\psi_X : x \mapsto \begin{cases} e^{-2i\pi x} & \text{si } K = \mathbf{R} \\ \psi_p(x) = e^{2i\pi\langle x\rangle} & \text{si } H = \mathbf{Q}_p,\ \langle x\rangle \text{ partie fractionnaire } p\text{-adique} \\ \psi_p \circ T_X(x) & \text{si } K_p \text{ sous-corps premier de } K \end{cases}$$

On a alors notamment les formules intégrales réciproques :

$$f^\star(x) = \int_X f(y)\psi_X(xy)d^T y \qquad f(x) = \int_X f^\star(y)\psi_X(-xy)d^{\star T} y$$

Théorème 2.3. *Les mesures de Tamagawa sont*

- ⋆ $|det(Tr_X(e_ie_j))|^{1/2}dx$ *si* $K' = \mathbf{R}$, $(e_i)_i$ *étant une* $\mathbf{R}$*-base de* H
- ⋆ $D_X^{-1/2}dx$ *, où* $D_X = \|det(T_X(e_ie_j))\|^{-1}$*, sinon,* $(e_i)_i$ *étant une* R*-base de* $\mathcal{O}$

Preuve. Dans le cas $\mathbf{R} \subseteq X$, c'est la formule classique d'inversion de Fourier.

Regardons le cas non archimédien. Commençons par le cas $X = \mathbf{Q}_p$. Le R-ordre maximal est $\mathbf{Z}_p$, notons Φ sa fonction caractéristique dont on cherche à calculer la transformée de Fourier $\widehat{\Phi}(x)$ – notons qu'il suffit de vérifier que la normalisation est la bonne pour une seule fonction.

Si $x \in \mathbf{Z}_p$, alors pour tout $y \in \mathbf{Z}_p$ on a $\psi_p(xy) = e^{2i\pi\langle xy\rangle} = 1$ par définition. Puisque le volume de $\mathbf{Z}_p$ est normalisé à 1 pour les mesures de Tamagawa, on obtient

$$\forall x \in \mathbf{Z}_p, \widehat{\Phi}(x) = \int_{\mathbf{Q}_p} \phi(y)\psi_p(xy)dy = \int_{\mathbf{Z}_p} \psi_p(xy)dy = \mathrm{vol}(\mathbf{Z}_p) = 1 = \phi(x)$$

Si $x \notin \mathbf{Z}_p$, notons $\langle x\rangle = \frac{a}{p^m} \in]0,1[$ sa partie fractionnaire p-adique. Pour calculer l'intégrale donnant la transformée de Fourier, on partitionne $\mathbf{Z}_p$ modulo p^m :

$$\mathbf{Z}_p = \bigsqcup_{i=0}^{p^m-1} (i + p^m\mathbf{Z}_p)$$

de sorte qu'en écrivant $\psi_p(xy) = e^{2i\pi\langle xy\rangle}$ et avec $\psi_p(xy') = 1$ pour $y' \in p^m\mathbf{Z}_p$, il vient avec $\xi = \psi_p(x)$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}(x) &= \int_{\mathbf{Q}_p} \phi(y)\psi_p(xy)dy = \int_{\mathbf{Z}_p} \psi_p(xy)dy \\
&= \sum_{i=0}^{p^m-1} \int_{p^m\mathbf{Z}_p} \psi_p(x(i+y'))dy' = \sum_{i=0}^{p^m-1} \int_{p^m\mathbf{Z}_p} \psi_p(xi)dy' \\
&= \int_{p^m\mathbf{Z}_p} \sum_{i=0}^{p^m-1} \xi^i dy' = \mathrm{vol}(p^m\mathbf{Z}_p) \sum_{i=0}^{p^m-1} \xi^i \\
&= 0 = \phi(x)
\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a $\widehat{\Phi}(x) = \Phi(x)$, la mesure est donc en particulier autoduale et est la mesure de Tamagawa recherchée.

Dans le cas plus général, notons $\mathcal{O}$ un ordre maximal de X, Φ sa fonction caractéristique, $(e_i)_i$ une $\mathbf{Z}_p$-base, et $(e_i^\star)_i$ sa base duale pour la trace T_X, qui est une base de l'« orthogonal » $\tilde{\mathcal{O}} = \{x \in X : \forall y \in \mathcal{O}, T_X(xy) \in \mathbf{Z}_p\}$. On montre que $\widehat{\Phi}$ est une fonction caractéristique de $\tilde{\mathcal{O}}$. Il vient alors par définition du caractère canonique, si $x \in \mathcal{O}$,

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{\Phi}}(x) &= \int_X \widehat{\Phi}(y)\psi_X(xy)dy \\ &= \int_{\tilde{O}} \psi_X(xy)dy = \int_{\tilde{O}} \psi_p(T_X(xy))dy \\ &= \int_{\tilde{O}} dy \\ &= vol(\tilde{O}) = \mathrm{vol}(\tilde{O})\phi(x)\end{aligned}$$

ce qui fait que la mesure de Tamagawa est la mesure corrigée $\mathrm{vol}(\tilde{O})^{-1/2}dx$. Puisque $e^\star$ est une base de $\tilde{O}$, que e est une base de O dont le volume est 1, on a bien $\mathrm{vol}(\tilde{O}) = \det(Q) = det^{-1}T_H(e_ie_j)$ comme voulu. □

Théorème 2.4. *Les mesures de Tamagawa additives classiques s'obtiennent en calculant les D_X pour les bases usuelles :*

- ★ $dx_{\mathbf{R}} = dx$ *pour la base* (1)
- ★ $dx_{\mathbf{C}} = 2dx_1dx_2$ *pour la base* $(1, i)$
- ★ $dx_{\mathbf{H}} = 4dx_1dx_2dx_3dx_4$ *pour la base* $(1, i, j, k)$
- ★ $dx_{M_2(K)} = dx_1dx_2dx_3dx_4$ *pour la base* $(E_{ij})_{ij}$

2.3. Les mesures globales.

Définition 2.4. On définit les mesures suivantes, appelées mesures de Tamagawa adéliques :

- ★ $dx'_A = \prod_v dx'_v$
- ★ $dx^\star_A = \prod_v dx^\star_v$

On sait notamment exprimer la mesure multiplicative en fonction des mesures locales additives, grâce à la relation $dx^\star_v = ||x_v||^{-1}dx_v$:

$$\begin{aligned}dx^\star_A &= \prod_v dx^\star_v \\ &= \prod_{v\in P} D_v^{-1/2}dx^\star_v \prod_{v\in\infty} dx^\star_v \\ &= \prod_{v\in P} D_v^{-1/2}||x_v||^{-1}dx_v \prod_{v\in\infty}(1-q)^{-1}||x_v||^{-1}dx_v \\ &= ||x||^{-1}\prod_{v\in P}(1-Nv^{-1})^{-1}dx'_v \prod_{v\in\infty} dx'_v \quad \text{dans le cas de } \mathbf{Q}, \infty = \{\infty\}\end{aligned}$$

2.4. Calcul des volumes locaux.

Théorème 2.5. *On connait les volumes suivants :*

$$\begin{aligned}vol(\mathbf{R}_1) &= 2 \\ vol(\mathbf{C}_1) &= 2\pi \\ vol(\mathbf{H}_1) &= 2\pi^2 \\ vol(\mathbf{H}^1) &= 4\pi^2\end{aligned}$$

Preuve. Tous ces calculs reposent sur le dévissage des mesures par le module ou la norme réduite, donné généralement par la suite exacte

$$1 \longrightarrow X_1 \ (resp.\ X^1) \longrightarrow X^\star \longrightarrow \|X^\star\| \ (resp.\ X_1) \longrightarrow 1$$

qui fait que $\mathrm{vol}(X_1) = \mathrm{vol}(X^\star)/\mathrm{vol}(\|X^\star\|)$. Les $\mathrm{vol}(X^\star)$ sont souvent accessibles via les choix de normalisation, et les $\mathrm{vol}(\|X^\star\|)$ sont calculables en paramétrant sur K.

Concernant le volume de $\mathbf{H}^1$, nous paramétrons $\mathbf{H}^\star \cong \mathbf{R}^4\backslash\{0\}$ par ses coordonnées x_i. Le volume de la boule de rayon r en dimension 4 est $\frac{\pi^4 r^2}{2}$ [Weisstein, 2004]. Cela permet de calculer le module, $B(0,1)$ étant envoyée par x sur $B(0,n(x))$:

$$\|x\| = \frac{\mathrm{vol}(x \cdot B(0,1))}{\mathrm{vol}(B(0,1))} = \frac{\mathrm{vol}(B(0,n(x)))}{\mathrm{vol}(B(0,1))} = n(x)^2$$

Ce qui fait que la mesure de Tamagawa multiplicative pour $H^\star$ est $\|x\|^{-1}dx_{\mathbf{H}} = 4n(x)^{-2}\prod dx_i$. On utilise alors le dévissage $1 \longrightarrow \mathbf{H}^1 \longrightarrow \mathbf{H}^\star \longrightarrow \mathbf{R}_+^\star \longrightarrow 1$. La mesure de Tamagawa sur $\mathbf{R}_+^\star$ est $t^{-1}dt$, celle sur $\mathbf{H}^\star$ est $4n(x)^{-2}\prod_i dx_i$. Il vient alors par compatibilité de mesures, avec $t = \|x\|$ et $g(x) = n(x)^2\mathbf{1}_{1/2\leqslant n(x)\leqslant 1}$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{H}^\star} 4g(x)n(x)^{-2}dx_1dx_2dx_3dx_4 = 4(\mathrm{vol}(B(0,1)) - \mathrm{vol}(B(0,1/2))) = \frac{3\pi^2}{2} \\
&\qquad = \int_{\mathbf{R}_+^\star}\int_{\mathbf{H}^1} g(i(y)x)dydt \underset{n(x)=1}{=} \mathrm{vol}(\mathbf{H}^1)\int_{\mathbf{R}_+^\star} g(i(y))dy = \mathrm{vol}(\mathbf{H}^1)\int_{1/2}^1 t^2\frac{dt}{t} = \frac{3}{8}\mathrm{vol}(\mathbf{H}^1)
\end{aligned}$$

ce qui donne $\mathrm{vol}(\mathbf{H}^1) = 4\pi^2$. On aurait :

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\mathbf{R}_1) &= \mathrm{vol}(\mathbf{R}^\star)/\mathrm{vol}(\|R^\star\|) \\
&= \mathrm{vol}(\mathbf{R}^\star)/\mathrm{vol}(\mathbf{R}_+^\star) \\
&= 2 \\
\mathrm{vol}(\mathbf{C}_1) &= \mathrm{vol}(\mathbf{C}^\star)/\mathrm{vol}(\|\mathbf{C}^\star\|) \\
&= \mathrm{vol}(\mathbf{R}^\star)\mathrm{vol}([0,\pi[)/\mathrm{vol}(\mathbf{R}_+^\star) \\
&= 2\pi \\
\mathrm{vol}(\mathbf{H}_1) &= \mathrm{vol}(\mathbf{C}^\star)\mathrm{vol}(\mathbf{C}^\star)/\mathrm{vol}(\mathbf{R}_+^\star) \\
&= 2\pi^2
\end{aligned}$$

de la même manière. □

Théorème 2.6. *Avec $\Gamma_0(p^m) = \mathcal{O}_m^1 = \{M \in \mathcal{O} \ :\ c \equiv 0 \bmod \pi^m R\}$, on a*

$$vol(\Gamma_0(p^m)) = D_K^{-3/2}(1-q^{-2})q^{1-m}\begin{cases} 1 & \textit{si } A \textit{ est une algèbre à division} \\ (1-q^{-1})^{-1} & \textit{si } A \cong M_2(K)\end{cases}$$

Preuve. La norme réduite est surjective de $\mathcal{O}^\star$ dans $R^\star$. On obtient une suite exacte ramenant le calcul du volume de $\mathcal{O}^1$ aux volumes connus :

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}^1 \longrightarrow \mathcal{O}^\star \longrightarrow R^\star \longrightarrow 1$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\mathcal{O}^1) &= \frac{\mathrm{vol}\mathcal{O}^\star}{\mathrm{vol}R^\star} \\
&= \frac{D_A^{-1/2}\mathrm{vol}_\star\mathcal{O}^\star}{D_K^{-1/2}\mathrm{vol}_\star R^\star} \\
&= \begin{cases} \dfrac{D_K^{-4/2}(1-q^{-2})}{D_K^{-1/2}} & \text{si } A \text{ est une algèbre à division} \\ \dfrac{D_K^{-4/2}(1-q^{-2})(1-q^{-1})^{-1}}{D_K^{-1/2}} & \text{si } A \cong M_2(K) \end{cases} \\
&= \begin{cases} D_K^{-3/2}(1-q^{-2}) & \text{si } A \text{ est une algèbre à division} \\ D_K^{-3/2}(1-q^{-2})(1-q^{-1})^{-1} & \text{si } A \cong M_2(K) \end{cases}
\end{aligned}$$

On obtient alors le résultat plus général avec la connaissance de l'indice $[\mathcal{O}^1 : \mathcal{O}^1_m] = q^{m-1}$. □

3. Résidus de fonctions spéciales et nombres de Tamagawa

C'est ici que se crée le lien entre les volumes globaux que l'on cherche à comprendre et les fonction zêta généralisées des algèbres de quaternions.

3.1. Fonctions ζ locales. On définit analoguement à la fonction zêta classique :

Définition 3.1. Dans le cas où $\mathbf{R} \nsubseteq X$, on pose pour $\mathcal{O}$ un ordre maximal de X :

$$\zeta_X(s) = \sum_{I \subseteq \mathcal{O}} N(I)^{-s}$$

où la somme porte sur les idéaux entiers à gauche de $\mathcal{O}$.

La bonne connaissance des ordres et de leurs idéaux permet d'obtenir :

Théorème 3.1. *On a*

$$\zeta_X(s) = \begin{cases} (1-q^{-s})^{-1} & si\ X = K_p \\ \zeta_K(2s) & si\ X = H \text{ à division} \\ \zeta_K(2s)\zeta_K(2s-1) & si\ X = M_2(K_p) \end{cases}$$

Théorème 3.2. *On définit la fonction Z dans le cas où $\mathbf{R} \nsubseteq X$ par*

$$Z_X(s) = \int_{\mathcal{O}} N(x)^{-s} dx^\star = \begin{cases} \zeta_K(s) & si\ X = K \\ \frac{\zeta_H(s)}{\zeta_K(2)}(1-q^{-1})^{-1} & si\ X = H \text{ à division} \\ \frac{\zeta_H(s)}{\zeta_K(2)} & si\ X = M_2(K) \end{cases}$$

Preuve. Un idéal $I = \mathcal{O}x$ ne change pas modulo les unités, donc les idéaux sont paramétrés par $\mathcal{O}/\mathcal{O}^\star$ et l'intégrale se réduit à la somme sur tous les idéaux, tous « répétés » vol($\mathcal{O}^\star$) fois. Donc l'intégrale n'est autre que $\zeta_X(s)\mathrm{vol}(\mathcal{O}^\star)$, ce dernier volume étant connu dans chacun des cas, ainsi que l'expression de ζ_X en fonction de ζ_K par ce qui précède. □

3.2. **Fonctions ζ généralisées.** Analoguement à la fonction ζ de Riemann sur $\mathbf{Q}$, définie par

$$\zeta_{\mathbf{Q}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \int_{\mathbf{Q}} \mathbf{1}_{\mathbf{N}}(x)||x||^s dx$$

on définit une fonction Z sur des algèbres plus générales :

On constate qu'on a une expression intégrale, analoguement au cas réel, pour ces fonction zêta :

Définition 3.2. La fonction Z d'une algèbre X, pour une fonction de Schwartz-Bruhat f et un quasi-caractère c, est

$$Z_X(f, c, s) = \int_{X_A^\star} f(x)c(x)||x||^s dx_A^\star$$

Théorème 3.3. *Dans le cas où X est un corps, le volume de $X_{A,1}/X_K^\star$ est donné par*

$$vol(X_{A,1}/X_K^\star)\Phi^\star(0) = Res_{s=1} Z(\Phi, 1, s)$$

Preuve. La preuve, consistant à obtenir une équation fonctionnelle pour Z permettant d'exprimer ses résidus, suit exactement le schéma de celle de l'équation fonctionnelle de la fonction ζ de Riemann classique. On introduit la fonction de sélection

$$\phi : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On découpe l'intégrale définissant Z en fonction de la position de $||x||$ par rapport à 1 :

$$Z_X^1(f, c, s) := \int_{X_A^\star} f(x)c(x)||x||^s \phi(||x||) dx_A^\star$$

C'est une fonction entière. En effet, on peut prouver que la fonction Z globale, produit des fonctions Z locales, est un produit infini n'ayant pas de problème de convergence pour $[Re(s) > 1]$. Or si $Re(s) \leqslant Re(s_0)$, alors on a $|||x||^s| = ||x||^{Re(s)} \leqslant_{||x|| \geqslant 1} ||x||^{Re(s_0)}$, et l'intégrale converge donc encore absolument en s.

Pour la seconde partie, le changement de variable $x \mapsto x^{-1}$ donne :

$$\begin{aligned}
Z^2(f,c,s) &:= \int_{X_A^\star} f(x)c(x)\|x\|^s\phi(\|x\|^{-1})dx_A^\star \\
&\underset{x\mapsto x^{-1}}{=} \int_{X_A^\star} f(x^{-1})c(x^{-1})\phi(\|x\|)\|x\|^{-s}dx_A^\star \\
&= \int_{X_A^\star/X_K^\star} c(x)^{-1}\phi(\|x\|)\|x\|^{-s}\left[\sum_{a\in X_K} f(ax^{-1}) - f(0)\right]dx_A^\star \\
&= \int_{X_A^\star/X_K^\star} c(x)^{-1}\phi(\|x\|)\|x\|^{-s}\left[\left(\sum_{a\in X_K^\star} f^\star(xa) + f^\star(0)\right) - f(0)\right]dx_A^\star
\end{aligned}$$

en découpant en classes modulo $X_K^\star$ et par la formule de Poisson. Notons l'invariance de la mesure $dx_A^\star$ par $x\mapsto x^{-1}$, qui revient exactement à écrire $\|id^{-1}\| = \|id\|^{-1} = 1$.

On obtient ainsi une décomposition de la fonction zêta en des intégrales de type Z^1, et deux intégrales correspondants aux termes $f(0)$ et $f^\star(0)$ apparaissant lors de l'application de la formule de Poisson :

$$Z^2(f,c,s) = Z^1(f^\star,c^{-1},s) + J(f^\star,c,1-s) - J(f,c,s) \quad \text{où} \quad J(f,c,s) := f(0)\int_{X_A^\star/X_K^\star} c(x^{-1})\|x\|^{-1}\phi(\|x\|)dx_A^\star$$

Or, on a une suite exacte donnée par le module :

$$1 \longrightarrow X_{A,1}/X_K^\star \longrightarrow X_A^\star/X_K^\star \longrightarrow \|X_A^\star\| \underset{\|\star\|}{\longrightarrow} 1$$

qui permet de scinder la mesure $dx_A^\star = d\|x\|dx_{A,1}$ de sorte que

$$J(f,c,-s) = f(0)\int_{\|X_A^\star\|} t^{-s}\phi(t)dt^\star \int_{X_{A,1}/X_K^\star} c^{-1}(y)dy$$

en vertu du théorème de dévissage de mesures rappelé en annexe. Puisque il existe s tel que la première intégrale converge – à savoir $\mathrm{Re}(s) > 1$, ce n'est qu'une intégrale de Riemann puisque $\|X_{\mathbf{A}}^\star\| \subseteq \mathbf{R}$ – la dernière intégrale converge quel que soit le caractère c. Ainsi

$$m_X(c) := \int_{X_{A,1}\backslash X_K^\star} c^{-1}(y)dy < \infty$$

En particulier, on obtient déjà avec $c = 1$ la finitude du volume de $X_{A,1}/X_K^\star$. La première intégrale valant s^{-1}, on en déduit l'équation fonctionnelle de Z_X, ses pôles et les résidus associés :

$$Z_X(f,c,s) = Z_X^1 + Z_X^2 - m_X(c)\left(f^\star(0)(1-s)^{-1} + f(0)s^{-1}\right)$$

ce qui fait en particulier que

$$\mathrm{Res}_{s=1}Z = f^\star(0) \quad \text{et} \quad \mathrm{Res}_{s=0}Z = f(0)$$

On obtient donc

$$\mathrm{vol}(X_{A,1}/X_K^\star) = m_X(1) = \mathrm{Res}_{s=1}\zeta_K(s) \quad \square$$

Dans le cas de $\mathbf{Q}$, le résidu vaut 1. Dans le cas plus général, le problème revient à décomposer ζ_K en produit eulérien, ce qui permet d'obtenir le résidu. On pose dès lors la mesure de Tamagwa adélique :

$$dx_A^T m_K^{-1} dx_A^\star$$

3.3. **Nombres de Tamagawa.** Les nombres de Tamagawa sont les volumes fondamentaux à partir desquels on peut déduire les autres volumes adéliques. Avec les mesures de Tamagawa choisies, on a

Théorème 3.4.

$$\begin{aligned}
\tau(X) &= vol(X_A/X_K) = \tau(X_1) = 1\\
\tau(X_1) &= vol(X_{A,1}/X_K^\star) = 1\\
\tau(H^1) &= vol(H_A^1/H_K^1) = 1\\
\tau(G) &= vol(H_A^\star/K_A^\star H_K^\star) = 2
\end{aligned}$$

Preuve. Nous faisons la preuve pour $\tau(H^1)$ qui est le nombre de Tamagawa qui nous intéresse. Dans le cas où X est un corps, il s'agit essentiellement du théorème sur les fonctions ζ globales. Dans tous les cas, on a une suite exacte donnée par la norme réduite qui permet de relier les différents nombres de Tamagawa :

$$1 \longrightarrow H^1_{\mathbf{A}}/H^1_K \longrightarrow H_{A,1}/H_K^\star \longrightarrow_n K_{A,1}/K^\star \longrightarrow 1$$

qui donne $\tau(H^1)\tau(K_1) = \tau(H_1)$. Puisque nous avons déjà le résultat $\tau(K_1) = 1$ par choix de la mesure de Tamagawa, cela donne que $\tau(H^1) = \tau(H_1)$, et ce volume vaut 1 aussi par le choix de la mesure de Tamagawa, quand H est un corps.

Dans le cas où $X \cong M_2(K)$, il faut utiliser des calculs explicites. On souhaite prouver que $\tau(H^1) = \mathrm{vol}(SL_2(A)/SL_2(K)) = 1$. On part du découpage intégral rappelé en annexe :

$$\int_{\mathbf{A}^2} f(x)dx = \int_{SL_2(\mathbf{A})/SL_2(K)} \left(\sum_{a\in K^2\setminus\{(0,0)\}} f(ua) \right) \tau(u)$$

On utilise alors la formule de Poisson, puisque $det(u) = 1$:

$$\sum_{a\in K^2} f(ua) = \sum_{a\in K^2} f^\star({}^t u^{-1} a)$$

On fait alors le changement de variables $u \leftarrow -{}^t u^{-1}$ pour obtenir, en appliquant la formule à $f^\star$:

$$\int_{\mathbf{A}^2} f^\star(x)dx = \int_{SL_2(\mathbf{A})/SL_2(K)} \left(\sum_{a\in K^2} f(ua) - f^\star(0) \right) \tau(u)$$

En faisant la différence, il vient alors avec pour f une fonction constante

$$f^\star(0)-f(0) = \int_{\mathbf{A}^2}(f(x)-f^\star(x))dx = \int_{SL_2(\mathbf{A})/SL_2(K)}(f^\star(0)-f(0))\tau(u) = (f^\star(0)-f(0))\mathrm{vol}(SL_1(\mathbf{A})/SL_2(K))$$

ce qui donne le résultat souhaité. $\square$.

4. Expression des volumes globaux

Grâce à la connaissance des nombres de Tamagawa, nous allons parvenir à exprimer les volumes qui nous intéressent à partir de composantes locales autrement plus accessibles.

4.1. **Rapport aux volumes globaux.** On considère un ensemble de places S tel que :

- ⋆ S est fini et non vide
- ⋆ S vérifie la *condition d'Eichler*, *i.e.* contient au moins une place non ramifiée
- ⋆ S contient les places infinies

Notons que la condition d'Eichler signifie que $H_S^1 = \prod_{v\in S} H_v^1$ n'est pas compact, ce qui fait par le théorème d'approximation forte que $H_S^1 H_K^1$ est dense dans $H_{\mathbf{A}}^1$.

On considère le groupe

$$G^1 := \prod_{v\in S, \notin \mathrm{Ram}(H)} SL_2(K_v) = \prod_{v\in S,\notin\mathrm{Ram}(H)} H_v^1$$

puisque pour v place non ramifiée, $\mathbf{H}_v^1 = SL_2(K_v)$. Considérons aussi $\mathcal{O}$ un $R_{(S)}$-ordre de $\mathbf{H}$, *i.e.* un $R_{(S)}$-réseau complet qui est un anneau, où $R_{(S)}$ désigne les éléments entiers aux places hors de S. Considérons enfin des plongements fixés une fois pour toutes $\phi_v : K \to K_v$. On définit l'ouvert

$$C := \prod_{v\in S,\in\mathrm{Ram}(H)} H_v^1 \prod_{v\notin S} \mathcal{O}_v^1$$

ce qui fait que déjà nous avons

$$U := G^1 C = \prod_{v\in S} H_v^1 \prod_{v\notin S}\mathcal{O}_v^1 = \prod_{v\in S, v\notin \mathrm{Ram}H} SL_2(K_v) \prod_{v\in S, v\in\mathrm{Ram}H} H_v^1 \prod_{v\notin S} \mathcal{O}_v^1 \subseteq \mathbf{H}_A^1$$

Ainsi, $U = G^1 C$ est un sous-groupe ouvert de H_A^1. On a

$$H_A^1 = H_K^1 U$$

En effet, le théorème d'approximation forte donne que $G^1 H_K^1$ est dense dans H_A^1, puisque G^1 n'est pas compact, car S contient au moins une place non ramifiée. Puisque C est un ouvert, cela donne $CG^1H_K^1 = H_A^1$ comme voulu.

De plus,

$$H_K^1 \cap U = \mathcal{O}^1$$

En effet, $\mathcal{O}^1 \subseteq U$ car on a l'inclusion de chaque facteur $\mathcal{O}_v^1 \subseteq H_v^1$, et $\mathcal{O}^1 \subseteq H_K^1$ car $\mathcal{O} \subseteq H_K$. Réciproquement, si $x \in U \cap H_K^1$, il est de norme 1 donc il suffit de prouver que $x \in \mathcal{O}$. Or par définition de U, on a $x \in \mathcal{O}_v$ pour toute place hors de S. Puis $\mathcal{O}$ est un $R_{(S)}$-ordre, on n'impose donc rien aux places de S, *i.e.* $\mathcal{O} = \bigcap_{v \notin S} \mathcal{O}_v$ [Maclachlan and Reid, 2003, Lemme 6.2.2]. Ainsi $x \in \mathcal{O}$. □

Ainsi, par le théorème d'isomorphisme $NH/N \cong H/H \cap N$, il vient

$$H_A^1/H_K^1 = H_K^1 U/H_K^1 \cong U/H_K^1 \cap U = U/\mathcal{O}^1$$

On a

$$\begin{aligned}\tau(H^1) &= \mathrm{vol}(H_A^1/H_K^1)\\ &= \mathrm{vol}(U/\mathcal{O}^1)\\ &= \mathrm{vol}(G^1C/\mathcal{O}^1)\\ &= \mathrm{vol}(G^1/\mathcal{O}^1)\mathrm{vol}(C)\end{aligned}$$

La multiplicativité des volumes en dernière ligne vient de ce que $S_C \cap S_{G^1} = \emptyset$, et n'est donc rien de plus que la définition de la mesure globale comme mesure produit des mesures de Tamagawa locales.

Théorème 4.1.

$$vol(G^1/\mathcal{O}^1)^{-1} = \prod_{v \in Ram\mathbf{H} \cap S} vol(\mathbf{H}_v^1) \prod_{p \notin S} vol(\mathcal{O}_p^1)$$

Preuve. Le calcul précédemment établi du nombre de Tamagawa s'écrit

$$\tau(\mathbf{H}^1) = 1 = \mathrm{vol}(G^1C/\mathcal{O}^1)$$

ce qui permet de décomposer le volume $1 = \mathrm{vol}(G^1C/\mathcal{O}^1) = \mathrm{vol}(C)\mathrm{vol}(G^1/\phi(\mathcal{O}^1))$, d'où $\mathrm{vol}(G^1/\phi(\mathcal{O}^1)) = \mathrm{vol}(C)^{-1}$. □

4.2. **Volumes de certains groupes quaternioniques.**

Théorème 4.2. *Si S est un ensemble de places dont les finies sont non ramifiées, on a*

$$vol(G^1/\phi(\mathcal{O}^1)) = \zeta_K(2)(4\pi^2)^{-|Ram_\infty H|} D_K^{3/2} \prod_{p \in Ram_f \mathbf{H}} (q-1) \prod_{p \in S \cap P, \notin Ram_f \mathbf{H}} D_p^{-3/2}(1 - Np^{-2})$$

Preuve. On a les volumes locaux précédemment calculés

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(\mathbf{H}^1) &= 4\pi^2\\ \mathrm{vol}(\mathcal{O}_m^1) &= D_p^{-3/2}(1 - Np^{-2})\\ \mathrm{vol}(\Gamma_0(p^m)) &= D_K^{-3/2}(1 - Np^{-2})(1 + Np)^{-1} Np^{1-m}\end{aligned}$$

On sait également que

$$\zeta(2)^{-1} = \prod_p (1 - Np^{-2})$$
$$D_K = \prod_p D_p$$

et par définition de la mesure $dx_A^\star$ sur C, comme mesure produit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(G^1/\phi(\mathcal{O}^1))^{-1} &= \mathrm{vol}(C) \\
&= \prod_{v\in S\cap \mathrm{Ram}\mathbf{H}} \mathrm{vol}(\mathbf{H}_v^1) \prod_{p\notin S} \mathrm{vol}(\mathcal{O}_p^1) \\
&= \prod_{v\in S\cap \mathrm{Ram}_\infty\mathbf{H}} \mathrm{vol}(\mathbf{H}_v^1) \prod_{v\in {}^cS} \mathrm{vol}(\mathcal{O}_p^1) \\
&= \prod_{v\in \mathrm{Ram}_\infty\mathbf{H}} 4\pi^2 \prod_{v\in {}^cS\cap {}^c\mathrm{Ram}_f\mathbf{H}} \mathrm{vol}(\mathcal{O}_p^1) \prod_{v\in {}^cS\cap \mathrm{Ram}_f\mathbf{H}} \mathrm{vol}(\mathcal{O}_p^1) \\
&= (4\pi^2)^{|\mathrm{Ram}_\infty H|} \prod_{v\in {}^cS\cap {}^c\mathrm{Ram}_f\mathbf{H}} \mathrm{vol}(\mathcal{O}_p^1) \prod_{v\in {}^cS\cap \mathrm{Ram}_f\mathbf{H}} \mathrm{vol}(\mathcal{O}_p^1) \\
&= (4\pi^2)^{|\mathrm{Ram}_\infty H|} \prod_{v\in {}^cS\cap {}^c\mathrm{Ram}_f\mathbf{H}} D_v^{-3/2}(1-Np^{-2}) \prod_{v\in {}^cS\cap \mathrm{Ram}_f\mathbf{H}} D_v^{-3/2}(1-Np^{-2})(Np-1)^{-1} \\
&= (4\pi^2)^{|\mathrm{Ram}_\infty H|} \prod_{v\in \mathrm{Ram}_f\mathbf{H}} D_p^{-3/2} \prod_{v\in \mathrm{Ram}_f\mathbf{H}} (1-Np^{-2}) \prod_{v\in \mathrm{Ram}_f\mathbf{H}} (Np-1)^{-1} \\
&= (4\pi^2)^{|\mathrm{Ram}_\infty H|} D_K^{-3/2}\zeta_K(2)^{-1} \prod_{v\in \mathrm{Ram}_f\mathbf{H}} (Np-1)^{-1} \prod_{v\in S\cap {}^c\mathrm{Ram}_f\mathbf{H}} D_v^{3/2}(1-Np^{-2})^{-1}
\end{aligned}$$

Il suffit donc de savoir évaluer chacun des termes pour obtenir le volume. □

On en tire :

Théorème 4.3. *Si* **H** *est une algèbre de quaternions sur* **Q** *déployée à l'infini et si* $\mathcal{O}$ *est un* **Z***-ordre maximal, on a*

$$vol(\Gamma_{\mathcal{O}}^1) = \frac{\pi^2}{6} \prod_{p\,|\,D} (p-1)$$

Preuve. Dans le cas $K = \mathbf{Q}$, et si H est déployée à l'infini, on a :

- ⋆ $\zeta_{\mathbf{Q}}(2) = \frac{\pi^2}{6}$
- ⋆ $D_{\mathbf{Q}} = 1$
- ⋆ par définition du discriminant d'une algèbre de quaternions, $p \in \mathrm{Ram}_f H \iff d \mid D$
- ⋆ en supposant l'algèbre déployée à l'infini, $\mathrm{Ram}_\infty \mathbf{H} = \emptyset$
- ⋆ avec $S = \{\infty\}$, on a $S \cap \mathrm{Ram}_f \mathbf{H} = \emptyset$

qui permet notamment d'arriver à la correspondance de Jacquet-Langlands [Bergeron, 2011], [Bolte and Johansson, 1999]. □

5. Les surfaces hyperboliques associées

Il reste à dire ce qu'il en est du volume de la surface associée, dans la géométrie hyperbolique : on s'intéresse non plus à l'espace homogène $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{R})$, mais à la surface $\Gamma\backslash\mathcal{H}$. Tous les outils nécessaires de géométrie hyperbolique sont développés dans [Earp and Toubiana, 2009].

Théorème 5.1.

$$vol(\Gamma\backslash\mathcal{H}) = \frac{1}{\pi}(1 + \delta_{-1\in\Gamma})vol(\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{R}))$$

Preuve. Le rapport entre les deux volumes est donné par la suite exacte issue de l'identification $\mathcal{H} \cong SL_2(\mathbf{R})/SO_2$:

$$1 \longrightarrow SO_2(\mathbf{R}) \longrightarrow SL_2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 1$$

On obtient en particulier que

$$\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathcal{H})\mathrm{vol}(SO_2(\mathbf{R})) = \mathrm{vol}(\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{R}))$$

et le calcul de $\mathrm{vol}(SO_2)$ s'obtient en écrivant l'égalité dans le cas particulier $\Gamma = PSL_2(\mathbf{Z})$, où les volumes sont connus grâce au théorème de Gauss-Bonnet et à l'exemple d'application des résultats précédents. On obtient $\mathrm{vol}(SO_2) = \pi$, d'où le résultat. □

On obtient en particulier que

$$A(\Gamma_{\mathcal{O}}\backslash\mathcal{H}) = \frac{\pi}{3}\prod_{p\,|\,D}(p-1)$$

De nombreux autres exemples de calculs d'aires et de volumes sont traités dans [Vignéras, 1980, ch. 4] et [Maclachlan and Reid, 2003, ch. 11].

Annexes

Dévissages de mesures.

Théorème 5.2. *Si ω est une bonne fonction, dg et dh des mesures de Haar sur G et $H \leqslant G$ sous-groupe fermé, alors il existe une unique mesure de Radon positive sur G/H dg' telle que*

$$\int_G \omega(g)f(g)dg = \int_H dh \int_{G/H} dg' f(g'h)$$

Notamment, dès qu'il existe une suite exacte

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow H' \cong G/H \longrightarrow 1$$

alors on peut dévisser la mesure de G en $dg = dhdg'$.

L'idée de la preuve de l'identité qui nous intéresse est dans [Goldfeld, 2006, Théorème 1.5.1].

Théorème 5.3. *Si G est un groupe localement compact unimodulaire, g un sous-groupe unimodulaire de G, Γ et γ des sous-groupes discrets de G tels que $\gamma \subseteq \Gamma$, et si $vol(g/\gamma)$ est fini, alors il existe des mesures compatibles de sorte que*

$$vol(g/\gamma) \int_{G/g} f(x)dx = \int_{G/\Gamma} \left(\sum_{a \in \Gamma/\gamma} f(au) \right) du$$

Le résultat se trouve dans [Weil, 1982, Lemme 2.4.2].

Analyse de Fourier adélique. Les caractères, *i.e.* les morphismes continus, se ramènent à un unique caractère canonique, dans $\mathbf{R}$ comme dans $\mathbf{Q}_p$:

Théorème 5.4. *Les caractères sont :*

- ⋆ *les $x \mapsto e^{2i\pi\lambda x}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, pour $K = \mathbf{R}$*
- ⋆ *les $x \mapsto e^{2i\pi\langle ax \rangle}$, $a \in \mathbf{Q}_p$, pour $K = \mathbf{Q}_p$*

On note ψ_∞ le caractère réel canonique, correspondant à $\lambda = 1$, et ψ_p celui p-adique correspondant à $a = 1$. La transformation de Fourier est alors définie adéliquement pour le caractère canonique $\psi_{\mathbf{A}} = \prod_p \psi_p$ et la mesure de Tamagawa adélique :

$$f^\star(x) := \int_{X_{\mathbf{A}}} f(y)\psi_{\mathbf{A}}(xy)dy'_{\mathbf{A}}$$

Théorème 5.5. *Pour une « bonne » fonction f, à savoir continue et intégrale ainsi que sa transformée de Fourier, et suffisamment décroissante de sorte que les séries $\sum_K f(x+a)$ et $\sum_K f^\star(x+a)$ convergent uniformément, on a la formule de Poisson adélique*

$$\sum_{a \in X_K} f(a) = \sum_{a \in X_K} f^\star(a)$$

Preuve. La preuve est identique à la preuve classique sur $\mathbf{R}$, [?, 4.1].

Références

[Bergeron, 2011] Bergeron, N. (2011). *Le spectre des surfaces hyperboliques*.

[Bolte and Johansson, 1999] Bolte, J. and Johansson, S. (1999). A spectral correspondence for maass waveforms. *Geom. func. Anal.*

[Earp and Toubiana, 2009] Earp, R. S. E. and Toubiana, E. (2009). *Introduction à la géométrie hyeprbolique et aux surfaces de Riemann*.

[Goldfeld, 2006] Goldfeld, D. (2006). *Automorphic Forms and L-functions for the Group GL(n, R)*.

[Maclachlan and Reid, 2003] Maclachlan, C. and Reid, A. (2003). *Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds*.

[Peyre, 1995] Peyre, E. (1995). Hauteurs et mesures de tamagawa sur les variétés de fano. *Duke Math Journal*.

[Vignéras, 1980] Vignéras, M.-F. (1980). *Arithmétique des algèbres de quaternions*.

[Weil, 1967] Weil, A. (1967). *Basic Number Theory*.

[Weil, 1982] Weil, A. (1982). *Adeles and Algebraic Groups*.

[Weisstein, 2004] Weisstein, E. W. (2004). Hypersphere. *MathWorld – A Wolfram Web Resource*.