FICHE DE RÉVISION POUR L'EXAMEN

JOÃO LOURENÇO

Abstract. Le présent document est un résumé du cours d'*Algèbre 2 : Introduction à l'algèbre linéaire* de Christian Ausoni à l'Institut Galilée – L1 Informatique, Mathématiques et double licence pendant le second semestre de l'année scolaire 2025–26. Le but est de présenter les principales définitions, lemmes, propositions, théorèmes et exemples du cours. Il est destiné à servir de fiche de révision pour la préparation à l'examen.

Contents

Dans tout ce qui suit, K désigne un corps commutatif (le plus souvent $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1. Le corps des nombres complexes

1.1. Généralités sur les corps.

Définition 1.1 (Groupe)**.** Soit G un ensemble et $\star : G \times G \to G$ une opération binaire. On dit que $(G, \star)$ est un *groupe* si :

(a) $\star$ est associative : $\forall x, y, z \in G,\ (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$;
(b) $\star$ admet un élément neutre : $\exists e \in G, \forall x \in G,\ e \star x = x = x \star e$;
(c) tout élément admet un inverse : $\forall x \in G, \exists y \in G,\ x \star y = e = y \star x$.

Le groupe est dit *abélien* ou *commutatif* si de plus $\star$ est commutative.

Définition 1.2 (Anneau commutatif)**.** Un ensemble $(A, +, \cdot)$ muni de deux opérations binaires est un *anneau commutatif* si :

(a) $(A, +)$ est un groupe abélien (neutre 0) ;
(b) la multiplication est associative et commutative ;
(c) la multiplication est distributive sur l'addition ;
(d) la multiplication admet un élément neutre $1 \in A$.

Définition 1.3 (Corps commutatif)**.** Un anneau commutatif $(A, +, \cdot)$ est un *corps commutatif* si $0 \neq 1$ et si tout élément non nul est inversible pour la multiplication.

Définition 1.4 (Sous-corps)**.** Soit $(L, +, \cdot)$ un corps et $K \subset L$. On dit que K est un *sous-corps* de L si :

(a) $\forall a, b \in K,\ a + b \in K$ et $a \cdot b \in K$;
(b) si $a \in K$ alors $-a \in K$, et si $a \neq 0$ alors $a^{-1} \in K$;
(c) $1 \in K$.

Définition 1.5 (Homomorphisme de corps)**.** Une application $f : K \to L$ entre deux corps est un *homomorphisme de corps* si :

(a) $\forall a, b \in K,\ f(a + b) = f(a) + f(b)$;
(b) $\forall a, b \in K,\ f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$;
(c) $f(1_K) = 1_L$.

Un *isomorphisme de corps* est un homomorphisme bijectif ; un *automorphisme* est un isomorphisme $K \to K$.

Lemme 1.6. *Tout homomorphisme de corps $f : K \to L$ est injectif, et $f(K)$ est un sous-corps de L.*

1.2. Construction et propriétés de $\mathbb{C}$.

Définition 1.7. On munit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ des opérations :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc).$$

Théorème 1.8. $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ *est un corps commutatif, de zéro* $(0, 0)$ *et d'unité* $(1, 0)$*. L'opposé de* (a, b) *est* $(-a, -b)$*, et si* $(a, b) \neq (0, 0)$*, son inverse est*

$$(a, b)^{-1} = \left(\tfrac{a}{a^2+b^2},\ -\tfrac{b}{a^2+b^2} \right).$$

De plus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ r \mapsto (r, 0)$ *est un homomorphisme de corps, et* $(0, 1)^2 = -(1, 0)$.

Définition 1.9. Le corps $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ est appelé *corps des nombres complexes* et noté $\mathbb{C}$. On pose $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$ et $i = (0, 1)$, si bien que $i^2 = -1$ et tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de façon unique

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

appelée *forme algébrique* ou *forme cartésienne* de z.

Définition 1.10 (Partie réelle et imaginaire)**.** Pour $z = a + bi \in \mathbb{C}$, on appelle *partie réelle* de z le réel $\mathrm{re}(z) := a$, et *partie imaginaire* le réel $\mathrm{im}(z) := b$.

Lemme 1.11. *Tout nombre réel $a \neq 0$ possède exactement deux racines carrées dans $\mathbb{C}$:*
- *$\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a > 0$;*
- *$\sqrt{-a}\, i$ et $-\sqrt{-a}\, i$ si $a < 0$.*

Définition 1.12 (Conjugaison)**.** On appelle *conjugaison* l'application $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ a+bi \mapsto a-bi$. On note $\overline{z} = c(z)$.

Théorème 1.13. *La conjugaison $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est un automorphisme de $\mathbb{C}$. De plus :*
(a) $c \circ c = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ *(involution) ;*
(b) $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$ *;*
(c) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{re}(z)$ *et* $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{im}(z)\, i$.

Définition 1.14 (Module)**.** Pour $z = a+bi \in \mathbb{C}$, on définit le *module* de z par $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.15 (Propriétés du module)**.** *Pour tous $w, z \in \mathbb{C}$:*
(a) $|z|^2 = z\overline{z}$, *donc* $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ *;*
(b) $|z| = 0 \iff z = 0$ *;*
(c) $|\,\mathrm{re}(z)| \leqslant |z|$, $|\,\mathrm{im}(z)| \leqslant |z|$, $|\overline{z}| = |z|$ *;*
(d) $|wz| = |w||z|$ *et* $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ *;*
(e) $|w + z| \leqslant |w| + |z|$ *(inégalité triangulaire) ;*
(f) $\big||w| - |z|\big| \leqslant |w - z|$ *(inégalité triangulaire inverse).*

1.3. **Exponentielle complexe et forme trigonométrique.**

Lemme 1.16. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument dans $\mathbb{C}$. On note*

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Proposition 1.17 (Propriétés de l'exponentielle complexe)**.** *Pour tous $w, z \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$:*
(a) $e^{w+z} = e^w \cdot e^z$ *;*
(b) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ *;*
(c) $\exp_{\mathbb{C}}(x) = \exp_{\mathbb{R}}(x)$ *;*
(d) $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ *(*formule d'Euler*).*

Corollaire 1.18 (Formules d'addition)**.** *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:*

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$
$$\sin(x + y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y).$$

Corollaire 1.19. *Pour $z = a + bi \in \mathbb{C}$:* $e^{a+bi} = e^a\big(\cos(b) + i\sin(b)\big)$.

Définition 1.20 (Sous-groupe)**.** Soit $(G, \star)$ un groupe d'élément neutre e. Un sous-ensemble $H \subset G$ est un *sous-groupe* si :
(a) $\forall x, y \in H,\ x \star y \in H$;

(b) $\forall x \in H,\ x^{-1} \in H$;
(c) $e \in H$.

Proposition 1.21 (Le cercle unité)**.** *$U(1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$. L'inverse de $z \in U(1)$ est $z^{-1} = \overline{z}$. On l'appelle le* groupe unitaire *ou* cercle unité*.*

Proposition 1.22. *L'application $\mathbb{R} \to U(1),\ x \mapsto e^{ix}$ est un homomorphisme surjectif du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ sur $U(1)$, périodique de période 2π :*

$$e^{ix} = e^{iy} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = 2\pi k.$$

Corollaire 1.23 (Formule de Moivre)**.** *Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:*

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = \big(\cos(x) + i\sin(x)\big)^n.$$

Définition 1.24 (Argument et forme trigonométrique)**.** Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\frac{z}{|z|} = e^{i\alpha}$. On appelle *argument* de z la classe $[\alpha] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, notée $\arg(z)$. Le couple $(|z|, \arg(z))$ constitue les *coordonnées polaires* de z, et $z = |z|\, e^{i\alpha} = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ est la *forme trigonométrique* de z.

Proposition 1.25 (Calculs en forme trigonométrique)**.** *Si $w = re^{i\alpha}$, $z = se^{i\beta}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors*

$$w \cdot z = (rs)e^{i(\alpha+\beta)}, \quad z^{-1} = s^{-1}e^{-i\beta}, \quad \frac{w}{z} = \frac{r}{s}e^{i(\alpha-\beta)}, \quad w^n = r^n e^{in\alpha}.$$

1.4. Racines et équations du second degré.

Corollaire 1.26 (Racines n-èmes)**.** *Soit $z = re^{i\alpha} \neq 0$ et $n \geqslant 2$. Alors z possède exactement n racines n-èmes dans $\mathbb{C}$, données par*

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\alpha + 2\pi k}{n}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Théorème 1.27 (Équation du second degré complexe)**.** *Soit $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.*

- *Si $\Delta = 0$: unique solution $z = \frac{-b}{2a}$.*
- *Si $\Delta \neq 0$: notons $u, -u$ les deux racines carrées de Δ. Les solutions sont $\frac{-b+u}{2a}$ et $\frac{-b-u}{2a}$.*

Définition 1.28 (Racines de l'unité)**.** Pour $n \geqslant 1$, on pose $\mu_n := \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$, appelés *racines n-èmes de l'unité.*

Proposition 1.29. *$\mu_n \subset U(1)$ est un sous-groupe fini de cardinal n. En posant $\zeta_n := e^{i\frac{2\pi}{n}}$, on a $\mu_n = \{\zeta_n^k : 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$.*

2. Espaces vectoriels et applications linéaires

2.1. Structure d'espace vectoriel.

Définition 2.1 (Action d'un corps)**.** Soit $(G, \star)$ un groupe commutatif et K un corps. Une *action* de K sur G est une application $K \times G \to G$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$, vérifiant pour tous $\lambda, \mu \in K$ et $x, y \in G$:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (x \star y) &= (\lambda \cdot x) \star (\lambda \cdot y), \\ (\lambda + \mu) \cdot x &= (\lambda \cdot x) \star (\mu \cdot x), \\ \lambda \cdot (\mu \cdot x) &= (\lambda\mu) \cdot x, \\ 1 \cdot x &= x. \end{aligned}$$

Définition 2.2 (K-espace vectoriel)**.** Un *K-espace vectoriel* est un groupe abélien $(E, +)$ muni d'une action de K. Les éléments de E sont appelés *vecteurs*, ceux de K des *scalaires*.

Lemme 2.3. *Soit E un K-espace vectoriel. Pour tous $\lambda \in K$ et $x \in E$:*
- *(a)* $\lambda \cdot x = 0_E \iff (\lambda = 0$ *ou* $x = 0_E)$;
- *(b)* $(-1) \cdot x = -x$.

Définition 2.4 (Espace K^n). Pour $n \geqslant 1$, on munit K^n des opérations composante par composante :

$$(x_j)_j + (y_j)_j = (x_j + y_j)_j, \qquad \lambda \cdot (x_j)_j = (\lambda x_j)_j.$$

Proposition 2.5. *Pour tout $n \geqslant 1$, K^n est un K-espace vectoriel.*

Définition 2.6 (Espace des fonctions). Soit X un ensemble. On définit sur $\mathcal{F}(X, K)$:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Proposition 2.7. *$\mathcal{F}(X, K)$ est un K-espace vectoriel, de zéro l'application nulle.*

2.2. Sous-espaces vectoriels.

Définition 2.8 (Sous-espace vectoriel). Soit E un K-espace vectoriel et $F \subset E$. On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E si :
- (a) $0 \in F$;
- (b) $\forall x, y \in F,\ x + y \in F$;
- (c) $\forall \lambda \in K, \forall x \in F,\ \lambda \cdot x \in F$.

Proposition 2.9. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F muni des opérations restreintes est lui-même un K-espace vectoriel.*

Lemme 2.10. *Si $F \subset E$ sous-espace et $G \subset F$, alors G est sous-espace de F ssi G est sous-espace de E.*

Définition 2.11 (Support). Pour $f : X \to K$, le *support* de f est $\mathrm{Supp}(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. On note $\mathcal{F}_{\text{fin}}(X, K)$ le sous-ensemble des applications à support fini.

Proposition 2.12. *$\mathcal{F}_{\text{fin}}(X, K)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, K)$.*

2.3. Combinaisons linéaires et sous-espace engendré.

Définition 2.13 (Combinaison linéaire et Vect). Soit E un K-espace vectoriel, $S \subset E$. Une *combinaison linéaire* d'éléments de S est un vecteur de la forme

$$v = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \quad n \in \mathbb{N},\ x_i \in S,\ \lambda_i \in K.$$

Pour $n = 0$, on obtient la *combinaison linéaire vide*, qui vaut 0. On pose

$$\mathrm{Vect}(S) = \{v \in E : v \text{ est combinaison linéaire d'éléments de } S\}.$$

Proposition 2.14. *Soit E un K-espace vectoriel et $S \subset E$.*
- *(a)* $\mathrm{Vect}(S)$ *est un sous-espace vectoriel de E.*
- *(b) Si $F \subset E$ est un sous-espace contenant S, alors* $\mathrm{Vect}(S) \subset F$.

Définition 2.15. $\mathrm{Vect}(S)$ est appelé le *sous-espace vectoriel engendré par S*.

2.4. Intersection, union et somme de sous-espaces.

Proposition 2.16. *L'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 2.17. $\mathrm{Vect}(S) = \bigcap_{V \supset S \text{ s.e.v.}} V$ *: c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant S.*

Proposition 2.18 (Union de sous-espaces)**.** *$F \cup G$ est un sous-espace vectoriel ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.*

Définition 2.19 (Somme de sous-espaces)**.** $F + G := \mathrm{Vect}(F \cup G)$. Plus généralement, $F_1 + \cdots + F_n := \mathrm{Vect}(F_1 \cup \cdots \cup F_n)$.

Proposition 2.20. *$F + G = \{y + z : y \in F,\ z \in G\}$. Plus généralement, $F_1 + \cdots + F_n = \{x_1 + \cdots + x_n : x_i \in F_i\}$.*

2.5. **Applications linéaires.**

Définition 2.21 (Application linéaire)**.** $f : E \to F$ est *K-linéaire* si $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tous $x, y \in E$, $\lambda \in K$. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications K-linéaires $E \to F$. Une application linéaire $E \to E$ est un *endomorphisme.*

Lemme 2.22 (Caractérisations)**.** *f est K-linéaire ssi $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ pour tous x, y, λ, μ, ssi f préserve toute combinaison linéaire.*

Proposition 2.23. *$\mathcal{L}(E, F)$ est un K-espace vectoriel.*

Proposition 2.24 (Composition)**.** *Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$. La composition est bilinéaire.*

2.6. **Isomorphismes, noyau et image.**

Proposition 2.25. *Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.*

Définition 2.26 (Isomorphisme)**.** $f : E \to F$ linéaire bijective est un *isomorphisme.* Un isomorphisme $E \to E$ est un *automorphisme.*

Définition 2.27 (Image, noyau, pré-image)**.** Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $V \subset E$, $W \subset F$:

$$f(V) = \{f(x) : x \in V\}, \quad \mathrm{Im}(f) := f(E), \quad f^{-1}(W) = \{x \in E : f(x) \in W\}, \quad \mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(\{0\}).$$

Proposition 2.28. *$f(V)$, $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces de F ; $f^{-1}(W)$, $\mathrm{Ker}(f)$ sont des sous-espaces de E.*

Théorème 2.29 (Caractérisation par noyau et image)**.** *Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$:*

(a) f surjective $\iff$ $\mathrm{Im}(f) = F$;
(b) f injective $\iff$ $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

2.7. **Algèbre des endomorphismes.**

Définition 2.30 (K-algèbre)**.** Une *K-algèbre* est un K-espace vectoriel A muni d'un produit $\diamond$ associatif, bilinéaire, avec élément neutre 1.

Théorème 2.31. *Pour tout K-espace vectoriel E, $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$ muni de la composition est une K-algèbre, d'unité id_E.*

Corollaire 2.32. $\mathrm{GL}(E) := \{f \in \mathcal{L}(E) : f$ *inversible*$\}$ *est un groupe pour la composition, appelé* groupe linéaire général.

3. Systèmes d'équations linéaires

3.1. **Caractérisation des applications linéaires $K^n \to K^p$.**

Lemme 3.1. *$f \in \mathcal{F}(K^n, K)$ est K-linéaire ssi il existe $a_1, \ldots, a_n \in K$ uniques avec $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_j x_j$. On a $a_j = f(e_j)$.*

Corollaire 3.2. *$f : K^n \to K^p$ est K-linéaire ssi il existe une unique famille (a_{ij}) avec $f(x_1, \ldots, x_n) = (\sum_j a_{ij} x_j)_i$.*

3.2. **Équations et systèmes linéaires.**

Définition 3.3 (Système linéaire)**.** Un *système linéaire* à p équations et n inconnues est une famille $S = (E_i)$ d'équations $\sum_j a_{ij}x_j = b_i$. Le *système homogène associé* S_0 s'obtient en remplaçant b par 0. $\mathrm{Sol}(S) = \bigcap \mathrm{Sol}(E_i)$; S est *compatible* si $\mathrm{Sol}(S) \neq \varnothing$.

Définition 3.4 (Application linéaire associée)**.** $f : K^n \to K^p$, $(x_j) \mapsto (\sum_j a_{ij}x_j)_i$.

Proposition 3.5. $\mathrm{Sol}(S) = f^{-1}(\{b\})$. *Si S homogène :* $\mathrm{Sol}(S) = \mathrm{Ker}(f)$.

Corollaire 3.6. $\mathrm{Sol}(S_0)$ *est un sous-espace vectoriel de K^n ; tout système homogène est compatible.*

Proposition 3.7 (Structure affine des solutions)**.** *Soit S compatible et $a \in \mathrm{Sol}(S)$. Alors*

$$\mathrm{Sol}(S) = a + \mathrm{Sol}(S_0) = \{a + v : v \in \mathrm{Sol}(S_0)\}.$$

Solution générale = solution particulière + solutions du système homogène associé.

3.3. **Opérations élémentaires et forme échelonnée.**

Définition 3.8 (Opérations élémentaires)**.** (a) *Échange* : $(E_i \leftrightarrow E_j)$;
(b) *Cadrage* : $(E_i \leftarrow \lambda E_i)$, $\lambda \neq 0$;
(c) *Remplacement* : $(E_i \leftarrow E_i + \lambda E_j)$, $i \neq j$.

Proposition 3.9. *Les opérations élémentaires préservent l'ensemble des solutions.*

Remarque 3.10 (Avertissement)**. Attention** : deux remplacements simultanés $(E_i \leftarrow E_i + \lambda E_j)$ et $(E_j \leftarrow E_j + \mu E_i)$ peuvent changer $\mathrm{Sol}(S)$.

Définition 3.11 (Forme échelonnée (réduite))**.** S est *échelonné* si les équations non nulles sont au-dessus, si les coefficients de tête se décalent à droite, et s'il y a au plus une équation du type $0 = b_i$ avec $b_i \neq 0$. *Échelonné réduit* : de plus les coefficients de tête valent 1 et sont seuls non nuls dans leur colonne.

Théorème 3.12. *Tout système est équivalent à un système échelonné réduit, qui est* unique *si S est compatible.*

3.4. **Algorithme de Gauß.**

Définition 3.13 (Algorithme de Gauß)**. Descente** : choix du pivot, échange, remplacement, itération. **Remontée** : cadrage (pour avoir des pivots égaux à 1), remplacement (pour annuler au-dessus des pivots).

Remarque 3.14 (Pivots, variables libres, nombre de solutions)**.** Après l'algorithme, on a k pivots (en partie gauche) et $n - k$ variables libres. Le système possède soit aucune solution, soit une unique solution (si $k = n$), soit (pour $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ et $0 < k < n$) une infinité.

3.5. **Systèmes de Cramer.**

Définition 3.15 (Système de Cramer)**.** Un système S à n équations et n inconnues est de *Cramer* si son application linéaire associée $f : K^n \to K^n$ est un isomorphisme.

Proposition 3.16 (Caractérisations)**.** *Équivalent à : pour tout second membre, unique solution ; ou : S_{er} a n pivots tous à gauche.*

4. Espaces vectoriels de dimension finie

4.1. Familles de vecteurs.

Définition 4.1 (Famille)**.** Une *famille* $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ est une application $I \to E$. Son image est $\mathrm{Im}(\mathcal{F}) = \{v_i : i \in I\} \subset E$. Une famille est *finie* si I est fini.

Remarque 4.2. Attention : ne pas confondre la famille $(v_i)_{i \in I}$ (application) et son image $\mathrm{Im}(\mathcal{F}) \subset E$ (sous-ensemble). Un même vecteur peut apparaître plusieurs fois.

4.2. Familles libres, génératrices, bases.

Définition 4.3. Soit $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ une famille dans E.

(a) $\mathcal{F}$ est *génératrice* si $\mathrm{Vect}(\mathrm{Im}(\mathcal{F})) = E$.
(b) Si finie, $\mathcal{F}$ est *libre* si $\sum \lambda_i v_i = 0 \implies \forall i,\ \lambda_i = 0$. En général, libre si toute sous-famille finie l'est.
(c) Sinon, $\mathcal{F}$ est *liée.*
(d) $\mathcal{F}$ est une *base* si elle est libre et génératrice.

Remarque 4.4. Quelques propriétés :

- Un vecteur répété ou le vecteur nul rendent $\mathcal{F}$ liée.
- La famille vide est libre, et est génératrice ssi $E = \{0\}$.

Exemple 4.5 (Lien avec les systèmes)**.** Pour $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in [\![n]\!]}$ dans K^p : génératrice ssi $\sum \lambda_i v_i = b$ compatible pour tout b ; libre ssi $\sum \lambda_i v_i = 0$ admet 0 pour unique solution ; base ssi système de Cramer (forçant $n = p$).

Définition 4.6 (Base canonique)**.** La base canonique $\mathcal{B}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ de K^n.

Proposition 4.7. *Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.*

Lemme 4.8 (Lemme utile)**.** *Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ libre et $u_{n+1} \in E$. Alors $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ est libre ssi $u_{n+1} \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.*

4.3. Dimension.

Définition 4.9. E est de *dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème 4.10 (Existence d'une base)**.** *E de dimension finie admet une base. Mieux : de toute famille génératrice finie on peut* extraire *une base.*

Théorème 4.11. *Si $\mathcal{F}$ libre et $\mathcal{G}$ génératrice (finie) dans E, alors $|\mathcal{F}| \leqslant |\mathcal{G}|$.*

Théorème 4.12 (Dimension)**.** *(a) Toutes les bases ont le même cardinal, noté $\dim(E)$.*
(b) Toute famille libre a cardinal $\leqslant \dim(E)$.
(c) Toute famille génératrice a cardinal $\geqslant \dim(E)$.

Théorème 4.13 (Caractérisations d'une base)**.** *Pour $\mathcal{F}$ de cardinal $\dim(E)$: base ssi libre, ssi génératrice.*

4.4. Théorème de la base incomplète.

Théorème 4.14. *Toute famille libre $\mathcal{L}$ de E vérifie $|\mathcal{L}| \leqslant \dim(E)$ et peut être* étendue *en une base de E.*

4.5. **Sous-espaces et somme directe.**

Théorème 4.15. *Soit F un sous-espace de E de dimension finie. Alors F est de dimension finie,* $\dim(F) \leqslant \dim(E)$*, avec égalité ssi $F = E$.*

Définition 4.16 (Rang d'une famille)**.** $\mathrm{rang}(\mathcal{F}) := \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F}))$ = cardinal maximal d'une sous-famille libre extraite de $\mathcal{F}$.

Définition 4.17 (Rang d'une application linéaire)**.** Soient E, F des K-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\mathrm{Im}(f)$ de dimension finie. Le *rang* de f est

$$\mathrm{rang}(f) := \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Théorème 4.18 (Théorème du rang)**.** *Soient E, F des K-espaces vectoriels avec E de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors* $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont de dimension finie, et*

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Corollaire 4.19. *Soient E, F des K-espaces vectoriels* de même dimension finie*, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) f est injective ;
(b) f est surjective ;
(c) f est bijective (c'est-à-dire un isomorphisme).

En particulier, pour $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie : $f \in$ $\mathrm{GL}(E)$ *ssi f est injective ssi f est surjective.*

Définition 4.20 (Somme directe, supplémentaires)**.** F et G sont en *somme directe* si $F \cap G = \{0\}$, on note alors $F \oplus G$. Ils sont *supplémentaires* dans E si $F \oplus G = E$.

Théorème 4.21 (Formule de Grassmann)**.** $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Corollaire 4.22. $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$*. Si F, G supplémentaires dans E :* $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

4.6. **Descriptions paramétrique et cartésienne.**

Remarque 4.23. Deux façons de décrire un sous-espace $F \subset K^n$:

- *Description paramétrique* : $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$.
- *Description cartésienne* : $F = \mathrm{Sol}(S_0)$ pour un système homogène S_0.

Pour passer de $F = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k)$ à une description cartésienne : on écrit le système $\sum \lambda_i f_i = x$ (inconnues λ_i), on l'échelonne, et on impose la nullité des pivots de droite (qui sont des expressions linéaires en $x_1, \ldots, x_n$).

Proposition 4.24. *Tout sous-espace vectoriel F de K^n avec* $\dim(F) = p$ *est l'ensemble des solutions d'un système homogène échelonné à n inconnues et $n - p$ équations.*

Remarque 4.25 (Hyperplan)**.** Un sous-espace de K^n de dimension $n - 1$ est appelé *hyperplan* : il est défini par une seule équation linéaire homogène non triviale.

4.7. **Méthodes de calcul du rang d'une famille.**

Remarque 4.26 (Deux méthodes)**.** Pour $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in [\![n]\!]}$ dans K^p, on dispose de deux méthodes :

- **Extraire une base** : échelonner le système homogène $\sum \lambda_i v_i = 0$. Les indices des pivots donnent une base extraite de $\mathcal{F}$.
- **Opérations sur les lignes** : former la matrice $V \in M_{n,p}(K)$ dont la i-ème ligne est v_i, l'échelonner par opérations élémentaires sur les lignes en V_e. Les lignes non nulles de V_e forment une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ (généralement *non extraite*).

Conséquence : le rang par ligne et le rang par colonne d'une matrice sont égaux (les deux méthodes utilisent des matrices transposées l'une de l'autre).

4.8. **Matrice des coordonnées d'un vecteur.**

Définition 4.27 (Matrice des coordonnées)**.** Soit E de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base *ordonnée* de E. On définit

$$\{\cdot\}_{\mathcal{B}} : E \to M_{n,1}(K), \qquad \{x\}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

$\{x\}_{\mathcal{B}}$ est la *matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.*

Remarque 4.28. La matrice de coordonnées dépend de la base *ordonnée*. Dans K^n avec sa base canonique, $\{x\}_{\mathcal{B}_n} = (x_1, \dots, x_n)^\top$; dans une autre base, coordonnées $\neq$ composantes.

Lemme 4.29. $\{\cdot\}_{\mathcal{B}} : E \to M_{n,1}(K)$ *est un isomorphisme de K-espaces vectoriels.*

Remarque 4.30. Ne pas confondre : un vecteur $x \in E$ et sa matrice de coordonnées $\{x\}_{\mathcal{B}} \in M_{n,1}(K)$.

4.9. **Matrice d'une application linéaire.**

Définition 4.31 (Matrice d'une application linéaire)**.** Soient E, F de dimension finie, $\dim(E) = n$, $\dim(F) = m$, $f : E \to F$ K-linéaire, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$ des bases ordonnées de E et F. La *matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$* est

$$\{f\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K), \quad \text{où} \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i.$$

Autrement dit, la j-ème colonne de $\{f\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ est $\{f(e_j)\}_{\mathcal{C}}$.

Proposition 4.32 (Formule fondamentale)**.** *Pour tout $x \in E$:*

$$\{f(x)\}_{\mathcal{C}} = \{f\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot \{x\}_{\mathcal{B}}.$$

Proposition 4.33 (Isomorphisme $\mathcal{L}(E, F) \cong M_{m,n}(K)$)**.** *L'application $f \mapsto \{f\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels $\mathcal{L}(E, F) \to M_{m,n}(K)$.*

Lemme 4.34. $\dim M_{m,n}(K) = m \cdot n$*, de base $(E_{i,j})$ (la matrice $E_{i,j}$ a un seul 1, en position (i, j)).*

Corollaire 4.35. $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim(E) \cdot \dim(F)$.

4.10. **Matrice d'une composition.**

Lemme 4.36 (Composition $\leftrightarrow$ produit matriciel)**.** *Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ bases ordonnées de E, F, G, $f : E \to F$, $g : F \to G$ K-linéaires. Alors*

$$\{g \circ f\}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = \{g\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot \{f\}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

Corollaire 4.37 (Isomorphisme de K-algèbres)**.** *Soit $\mathcal{B}$ base ordonnée de E. Alors $\{\cdot\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \to M_n(K)$ est un isomorphisme de K-algèbres, avec $\{\mathrm{id}_E\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n$. Il se restreint en un isomorphisme de groupes $\mathrm{GL}(E) \to \mathrm{GL}_n(K)$.*

4.11. **Matrices de passage et changement de base.**

Définition 4.38 (Matrice de passage)**.** Soit $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ deux bases ordonnées de E. La *matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$* est

$$\{\mathrm{id}_E\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in M_n(K) :$$

c'est la matrice de l'identité avec $\mathcal{B}$ en base de départ et $\mathcal{C}$ en base d'arrivée.

Proposition 4.39 (Formules de changement de base)**.** *Soit E de dimension finie et $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ deux bases ordonnées.*

(a) $\{\mathrm{id}_E\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ *est inversible, d'inverse* $\{\mathrm{id}_E\}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

(b) Pour $x \in E$ *:* $\{x\}_{\mathcal{C}} = \{\mathrm{id}_E\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot \{x\}_{\mathcal{B}}$.

Pour $f : E \to F$ *et* $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$*,* $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ *des bases ordonnées de* E *et* F *:*

(c) $\{f\}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{C}_2} = \{\mathrm{id}_F\}_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{C}_2} \cdot \{f\}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{C}_1} \cdot \{\mathrm{id}_E\}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$.

Corollaire 4.40 (Conjugaison, cas endomorphisme)**.** *Soit* $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ *bases ordonnées de* E *et* $P = \{\mathrm{id}_E\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$*. Pour tout* $f \in \mathcal{L}(E)$ *:*

$$\{f\}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = P \cdot \{f\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot P^{-1}.$$

L'application $c_P : M \mapsto PMP^{-1}$ *est un isomorphisme de* K*-algèbres* $M_n(K) \to M_n(K)$*, qui se restreint en un isomorphisme de groupes* $\mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K)$.

Points clés pour l'examen

(1) **Corps** $\mathbb{C}$: formes algébrique, trigonométrique, exponentielle ; module, conjugaison, argument ; racines n-èmes ; équation du second degré.
(2) **Espaces vectoriels** : axiomes, exemples (K^n, $\mathcal{F}(X, K)$, $\mathcal{F}_{\text{fin}}(X, K)$).
(3) **Sous-espaces** : trois conditions ; intersection (oui), union (non en général), somme $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.
(4) **Vect**(S) : plus petit sous-espace contenant S.
(5) **Applications linéaires** : caractérisations, composition, $\mathcal{L}(E, F)$, isomorphismes.
(6) **Noyau et image** : sous-espaces ; f injective $\iff$ $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$; f surjective $\iff$ $\mathrm{Im}(f) = F$.
(7) **Algèbre** $\mathcal{L}(E)$ **et groupe** $\mathrm{GL}(E)$.
(8) **Systèmes linéaires** : $\mathrm{Sol}(S) = f^{-1}(\{b\})$; sous-espace affine ; solution = particulière + homogène.
(9) **Opérations élémentaires** : échange, cadrage ($\lambda \neq 0$), remplacement. Attention aux remplacements simultanés !
(10) **Forme échelonnée réduite** : existence et unicité ; algorithme de Gauß.
(11) **Pivots vs variables libres** : k pivots et n inconnues $\Rightarrow$ $\mathrm{Sol}(S_0)$ engendré par $n - k$ vecteurs.
(12) **Systèmes de Cramer**.
(13) **Familles de vecteurs** : famille $\neq$ image. Libre / génératrice / base.
(14) **Lemme utile** : étendre une famille libre.
(15) **Dimension** : invariant. Caractérisations d'une base à cardinal $\dim(E)$.
(16) **Théorème de la base incomplète**.
(17) **Rang d'une famille** : deux méthodes (extraire / opérations sur les lignes). Rang ligne = rang colonne.
(18) **Théorème du rang** : $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rang}(f)$ pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie. Corollaire : en dimension finie égale, injectif $\iff$ surjectif $\iff$ bijectif.

(19) **Somme directe, supplémentaires, formule de Grassmann.**
(20) **Descriptions paramétrique et cartésienne**. Hyperplan.
(21) **Matrice de coordonnées** $\{x\}_{\mathcal{B}}$: dépend de la base *ordonnée.* $x \neq \{x\}_{\mathcal{B}}$.
(22) **Matrice d'une application linéaire** $\{f\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$: la j-ème colonne est $\{f(e_j)\}_{\mathcal{C}}$. Formule : $\{f(x)\}_{\mathcal{C}} = \{f\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot \{x\}_{\mathcal{B}}$.
(23) **Isomorphismes** $\mathcal{L}(E,F) \cong M_{m,n}(K)$ et $\mathcal{L}(E) \cong M_n(K)$. $\dim \mathcal{L}(E,F) = nm$.
(24) **Composition** $\leftrightarrow$ **produit matriciel**.
(25) **Matrice de passage** $P = \{\mathrm{id}\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$: inversible.
(26) **Formules de changement de base** : $\{x\}_{\mathcal{C}} = P \cdot \{x\}_{\mathcal{B}}$; pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $\{f\}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = P \cdot \{f\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot P^{-1}$ (conjugaison).

Exercice de synthèse

Exercice de synthèse. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ et l'application

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad (x,y,z,t) \mapsto (x+y-z+t,\ 2x+y-t,\ x+z-2t,\ 3x+2y-z).$$

On considère aussi

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y = z+t\}, \quad G = \mathrm{Vect}\big((1,0,1,0),(0,1,0,1),(1,1,1,1)\big).$$

Partie A — Application linéaire.

(1) Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire et écrire sa matrice $A = \{f\}_{\mathcal{B}_4}^{\mathcal{B}_4}$ dans la base canonique.
(2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ par l'algorithme de Gauß. Donner sa dimension et une base.
(3) En déduire $\dim(\mathrm{Im}(f))$ et une base. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Partie B — Sous-espaces F et G.

(4) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Donner $\dim(F)$ et une base.
(5) Calculer le rang de la famille génératrice donnée pour G. En déduire $\dim(G)$ et une base extraite.
(6) Déterminer $F \cap G$ et $\dim(F \cap G)$.
(7) Par la formule de Grassmann, calculer $\dim(F+G)$. A-t-on $F+G = \mathbb{R}^4$? F et G sont-ils supplémentaires ?
(8) Compléter une base de $F \cap G$ en une base de $\mathbb{R}^4$ par le théorème de la base incomplète.

Partie C — Système à paramètres et système de Cramer.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère

$$(S_\lambda) \quad \begin{cases} x+y+z = 1 \\ x+\lambda y+z = \lambda \\ x+y+\lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$

(9) Pour quelles valeurs de λ le système est-il de Cramer ?
(10) Pour chaque cas, décrire $\mathrm{Sol}(S_\lambda)$.

Partie D — Nombres complexes et linéarité.

Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = (1+i)\overline{z}$.

(11) g est-elle $\mathbb{R}$-linéaire ? $\mathbb{C}$-linéaire ?
(12) Mettre $1+i$ sous forme trigonométrique. Décrire géométriquement g vue comme application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
(13) Calculer $g \circ g$.

Partie E — Matrice de g et changement de base.

(14) En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ via $z = x + iy \mapsto (x, y)$, écrire la matrice $M = \{g\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ de g dans la base canonique $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$.
(15) Soit $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1,1)$ et $v_2 = (1,-1)$. Vérifier que $\mathcal{C}$ est une base. Écrire la matrice de passage $P = \{\mathrm{id}\}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ et calculer P^{-1}.
(16) Calculer $\{g\}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ par la formule de changement de base.

Solution

Solution. Partie A.

1. L'application f s'écrit sous la forme $f(x,y,z,t) = (\sum a_{ij}x_j)_i$, donc elle est $\mathbb{R}$-linéaire par le corollaire de caractérisation des applications linéaires $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Sa matrice dans la base canonique est obtenue en lisant les coefficients ligne par ligne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On échelonne la matrice A (équivalent à échelonner le système homogène $Ax = 0$) :

$$A \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pivots : colonnes 1 et 2, donc x et y. Variables libres : $z = s$ et $t = u$. La remontée donne $y = 2s - 3u$, puis $x = -y + z - t = -2s + 3u + s - u = -s + 2u$. Donc

$$\mathrm{Ker}(f) = \big\{(-s + 2u,\ 2s - 3u,\ s,\ u) : s, u \in \mathbb{R}\big\} = \mathrm{Vect}(v_1, v_2),$$

avec $v_1 = (-1, 2, 1, 0)$ et $v_2 = (2, -3, 0, 1)$. Cette famille est libre (les dernières composantes $(1,0)$ et $(0,1)$ sont indépendantes), donc (v_1, v_2) est une *base de* $\mathrm{Ker}(f)$ et $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$.

3. Par le *théorème du rang*, $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim \mathrm{Ker}(f) = 4 - 2 = 2$. Ceci se vérifie aussi directement : $\mathrm{rang}(A) = 2$ (nombre de pivots dans la forme échelonnée). Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est donnée par les images des vecteurs de base correspondant aux colonnes-pivot, soit $(f(e_1), f(e_2)) = ((1,2,1,3),(1,1,0,2))$. Comme $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$, *$f$ n'est pas injective* ; comme $\dim \mathrm{Im}(f) = 2 < 4 = \dim \mathbb{R}^4$, *$f$ n'est pas surjective* ; donc *pas bijective*. (On peut aussi appliquer le corollaire du théorème du rang : pour un endomorphisme en dimension finie, injectif $\Longleftrightarrow$ surjectif $\Longleftrightarrow$ bijectif, ce qui montre directement les trois absences à la fois.)

Partie B.

4. F est défini par l'équation linéaire homogène $x + y - z - t = 0$: c'est donc le noyau de la forme linéaire $\varphi : (x,y,z,t) \mapsto x + y - z - t$, et donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$; c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et $\dim(F) = 3$. Une description paramétrique avec $x = -y + z + t$ donne

$$F = \mathrm{Vect}\big(w_1, w_2, w_3\big) \text{ avec } w_1 = (-1,1,0,0),\ w_2 = (1,0,1,0),\ w_3 = (1,0,0,1).$$

Ces trois vecteurs forment une famille libre (les composantes 2, 3, 4 donnent une matrice triangulaire de rang 3), donc *base de F*.

5. On forme la matrice ayant les générateurs en ligne :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\operatorname{rang}(\mathcal{F}) = 2$ et $\dim(G) = 2$. Comme $(1,1,1,1) = (1,0,1,0) + (0,1,0,1)$, une base extraite est $\big((1,0,1,0),(0,1,0,1)\big)$.

6. Un vecteur de G s'écrit $v = a(1,0,1,0) + b(0,1,0,1) = (a,b,a,b)$. L'équation de F donne $a+b = a+b$, toujours vrai, donc $v \in F$. Ainsi $G \subset F$ et $F \cap G = G$. Donc $\dim(F \cap G) = 2$.

7. Par la formule de Grassmann :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 3 + 2 - 2 = 3.$$

Donc $F + G = F$ (puisque $G \subset F$), et $F + G \neq \mathbb{R}^4$. Comme $F \cap G = G \neq \{0\}$, la somme *n'est pas directe* ; donc F et G *ne sont pas supplémentaires.*

8. Une base de $F \cap G = G$ est $\big((1,0,1,0),(0,1,0,1)\big)$. On complète d'abord en base de F : il faut un vecteur de F hors de G. Le vecteur $(-1,1,0,0)$ est dans F (car $-1+1 = 0+0$) et pas dans G (un vecteur de G a sa première et sa troisième composante égales, ce qui n'est pas le cas ici). Donc $\big((1,0,1,0),(0,1,0,1),(-1,1,0,0)\big)$ est une base de F. On complète enfin en base de $\mathbb{R}^4$: il faut un vecteur hors de F, par exemple $e_1 = (1,0,0,0)$ (puisque $1+0 \neq 0+0$). La famille

$$\big((1,0,1,0),\ (0,1,0,1),\ (-1,1,0,0),\ (1,0,0,0)\big)$$

est libre par le lemme utile à chaque étape, de cardinal $4 = \dim \mathbb{R}^4$, donc base de $\mathbb{R}^4$.

Partie C.

9. On applique Gauß *en évitant de diviser par une quantité dépendant de* λ :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=\lambda \\ x+y+\lambda z=\lambda^2 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x+y+z=1 \\ (\lambda-1)y=\lambda-1 \\ (\lambda-1)z=\lambda^2-1 \end{cases}$$

Cas $\lambda \neq 1$: on peut alors diviser par $\lambda - 1 \neq 0$:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y=1 \\ z=\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda-1}=\lambda+1 \end{cases}$$

Après remontée, S_{er} a trois pivots, tous en partie gauche : c'est un *système de Cramer.*

Cas $\lambda = 1$: les deuxième et troisième équations deviennent $0 = 0$. Le système se réduit à $x+y+z = 1$. Ce n'est *pas un système de Cramer.*

10. *Si* $\lambda \neq 1$: unique solution. On a $z = \lambda+1$, $y = 1$, et $x = 1-y-z = 1-1-(\lambda+1) = -\lambda-1$. Donc

$$\operatorname{Sol}(S_\lambda) = \{(-\lambda-1,\ 1,\ \lambda+1)\}.$$

Si $\lambda = 1$: le système se réduit à $x+y+z = 1$, qui est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^3$ (variables libres y, z) :

$$\operatorname{Sol}(S_1) = \{(1-s-u,\ s,\ u) : s,u \in \mathbb{R}\} = (1,0,0) + \operatorname{Vect}\big((-1,1,0),\ (-1,0,1)\big).$$

Partie D.

11. $\mathbb{R}$-*linéarité* : pour $z, w \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$g(z+w) = (1+i)\overline{z+w} = (1+i)(\overline{z}+\overline{w}) = g(z)+g(w),$$
$$g(\lambda z) = (1+i)\overline{\lambda z} = (1+i)\lambda\overline{z} = \lambda g(z),$$

car $\overline{\lambda} = \lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc g est $\mathbb{R}$-*linéaire.*

$\mathbb{C}$-*linéarité* : non. En prenant $\lambda = i$ et $z = 1$: $g(i \cdot 1) = (1+i)\overline{i} = (1+i)(-i) = -i+1 = 1-i$, mais $i \cdot g(1) = i(1+i)\overline{1} = i + i^2 = -1+i$. Comme $1 - i \neq -1+i$, g *n'est pas* $\mathbb{C}$-*linéaire.*

Moralité : la conjugaison est le prototype d'application $\mathbb{R}$-linéaire mais pas $\mathbb{C}$-linéaire ; multiplier ensuite par un scalaire complexe ne change pas cela.

12. On a $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)$, donc

$$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}.$$

L'application g vue dans $\mathbb{R}^2$ est la composition d'une *réflexion* par rapport à l'axe réel (la conjugaison $z \mapsto \overline{z}$) suivie d'une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\pi/4$ (la multiplication par $1+i$). C'est une *similitude indirecte* de rapport $\sqrt{2}$.

13.

$$g \circ g(z) = (1+i)\overline{(1+i)\overline{z}} = (1+i)\,\overline{(1+i)}\,\overline{\overline{z}} = (1+i)(1-i)\,z = (1-i^2)\,z = 2z.$$

Donc $g \circ g$ est l'*homothétie de rapport* 2.

Partie E.

14. Pour $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$ et $(1+i)(x-iy) = x - iy + ix - i^2y = (x+y) + i(x-y)$. En identifiant $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$ par $z = x + iy \mapsto (x, y)$, on obtient

$$g(x, y) = (x + y,\ x - y).$$

On calcule $g(1, 0) = (1, 1)$ et $g(0, 1) = (1, -1)$, donc

$$M = \{g\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

15. La famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2) = ((1,1), (1,-1))$ est libre : par le lemme utile, $v_1 \neq 0$ et $v_2 \notin \mathrm{Vect}(v_1)$ (sinon $v_2 = \lambda v_1$ donnerait $1 = \lambda$ et $-1 = \lambda$, absurde). Comme $|\mathcal{C}| = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, c'est une base par le théorème de caractérisation.

La matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ a pour colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$ (mais ici $\mathcal{B}$ est canonique donc coordonnées = composantes) :

$$P = \{\mathrm{id}\}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer $P^{-1} = \{\mathrm{id}\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, on utilise la formule pour les matrices 2×2 de déterminant -2 :

$$P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(Vérification : $P \cdot P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2$. ✓)

16. Par la formule de changement de base :

$$\{g\}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = P^{-1} \cdot M \cdot P.$$

On remarque ici que $M = P$! Donc

$$\{g\}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = P^{-1} \cdot P \cdot P = P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vérification directe : $g(v_1) = g(1,1) = (2,0) = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2$, donc $\{g(v_1)\}_{\mathcal{C}} = \binom{1}{1}$ (première colonne). De même $g(v_2) = g(1,-1) = (0,2) = 1 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2$, donc $\{g(v_2)\}_{\mathcal{C}} = \binom{1}{-1}$ (deuxième colonne). On retrouve bien la matrice annoncée. ✓

Remarque géométrique : la coïncidence $M = P$ n'est pas un hasard. Comme $g(e_1) = v_1$ et $g(e_2) = v_2$ par définition de v_1, v_2, la matrice M de g dans la base canonique a déjà v_1, v_2 comme colonnes — soit exactement les colonnes de P.