Fiche 3 – Martingales

Exercice 1. Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale, relativement à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
1. Montrer que $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On suppose que M_n est de carré intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbb{E}\big[(M_{n+1} - M_n)^2 \big| \mathcal{F}_n\big] = \mathbb{E}\big[M_{n+1}^2 - M_n^2 \big| \mathcal{F}_n\big].$$

Exercice 2 – *Décomposition de Doob.* Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une sous-martingale, pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
1. Montrer qu'il existe un unique couple (M,A) tel que, pour tout $n \geq 0$, $X_n = M_n + A_n$, où $M = (M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et $A = (A_n)_{n\geq 0}$ est un processus prévisible issu de $A_0 = 0$.
2. Que peut-on dire de plus de A ?
3. Soit $(\xi_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. réelles centrées et de carré intégrable. On pose, pour tout $n \geq 0$, $s_n = \mathrm{Var}(\xi_n)$. On considère le processus S défini par $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Justifier que S est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ définie par $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, puis que $X_n = S_n^2$ est une sous-martingale, et expliciter le processus A précédent dans le cas de X.

Exercice 3 – *Urne de Polya.* Dans une urne se trouvent une boule blanche et une boule rouge (instant 0). On tire alors une boule, que l'on remet dans l'urne accompagnée d'une nouvelle boule de la même couleur, et on répète cette opération indéfiniment. À l'instant n se trouvent donc $n+2$ boules dans l'urne. On note Y_n le nombre de boules blanches à cet instant et $X_n = \dfrac{Y_n}{n+2}$ la proportion de boules blanches dans l'urne. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.
1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. En déduire que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque-sûrement vers une variable aléatoire U. Que vaut l'espérance du U ?
3. Calculer $\mathbb{E}(Y_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n)$. En déduire qu'il existe une suite convergente c_n telle que $(c_n X_n(1 - X_n))$ est une martingale. Quelle est la limite de cette martingale ? En déduire le second moment de U.
4. $(\star)$ Généraliser le calcul précédent et en déduire la loi de U.
5. Proposer un programme modélisant l'urne de Polya et le faire tourner plusieurs fois. Qu'observe-t-on ?

Exercice 4. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels telle que $\sum_{n\geq 1} a_n^2 < \infty$, et $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout n, $\mathbb{E}[\xi_n] = 0$ et $\mathrm{Var}(\xi_n) = 1$ (par exemple, $\xi_n \sim \mathcal{N}(0,1)$).
1. Montrer que la suite $M_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k$ est une martingale.
2. Montrer que $\sup_n \mathbb{E}[M_n^2] < \infty$ et en déduire que, presque-sûrement, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$ converge.

Exercice 5 – *Somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires, processus de Galton-Watson.* Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de v.a. indépendantes, de même loi, d'espérance m. On définit, pour tout $n \geq 0$,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$. On considère la somme des N premières variables de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$, c'est-à-dire la variable aléatoire $S_N = X_1 + \cdots + X_N$.
1. Montrer rigoureusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[S_N | N = n] = \mathbb{E}[S_n]$.
2. En déduire $\mathbb{E}[S_N | N]$, puis $\mathbb{E}[S_N]$.
3. *Application.* On note $(\xi_{m,n}, m, n \in \mathbb{N})$ une famille de varibles aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, d'espérance $m \in]0,\infty[$. On définit une suite de variables aléatoires (Z_n) par $Z_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$Z_{n+1} = \sum_{m=1}^{Z_n} \xi_{m,n+1}.$$

Z_n représente le nombre d'individus à la n-ième génération, dans un processus de branchement où à chaque génération m, le j-ième enfant a $\xi_{j,m+1}$ enfants, et donc le nombre d'enfant de chaque individu est indépendant de celui des autes. On appelle ce modèle un processus de Galton-Watson.
3.a) Justifier que $\mathbb{E}[X_{n+1}|X_n,X_{n-1},\ldots,X_1,X_0] = \mathbb{E}[X_{n+1}|X_n]$ et en donner la valeur.
3.b) En déduire que $M_n = m^{-n}X_n$ définit une martingale, et déterminer la valeur de $\mathbb{E}[X_n]$ pour tout $n \geq 0$.
3.c) Montrer que la suite $(M_n)_n$ admet presque sûrement une limite M_∞.
3.d) En déduire que si $m < 1$, alors $Z_n \to 0$ p.s. quand $n \to \infty$.
3.e) $(\star)$ En déduire que si $m = 1$, alors $Z_n \to 0$ p.s. quand $n \to \infty$.

Exercice 6 – ***Marche aléatoire biaisée.*** Soit $p \in]0,\frac{1}{2}[$. Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{Z}$ partant de $x \in \mathbb{N}$: $S_0 = x$ et, pour $n \geq 1$,

$$S_n = x + X_1 + \cdots + X_n,$$

où les variables aléatoires $X_1,X_2,\ldots$ sont indépendantes et de même loi, telles que

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_i = -1) = q = 1 - p.$$

Soit $R \in \mathbb{N}^*$, $R > x$. On définit le temps (aléatoire) $T = \inf\{n \geq 0 \,|\, S_n \in \{0,R\}\}$ et la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_n = (\sigma(X_1,\ldots,X_n))_n$.
1. On pose $Z_n = (q/p)^{S_n}$. Montrer que $Z = (Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}$.
2. Montrer que T est un temps d'arrêt.
3. En considérant la martingale arrêtée Z^T, montrer que, pour tout n, $\mathbb{E}[Z_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[Z_0]$, et en déduire $\mathbb{E}[Z_T] = \mathbb{E}[Z_0]$, puis la valeur de $\mathbb{P}(S_T = 0)$.
4. *Application.* Au jeu de la roulette française, il y a 37 case, 18 cases rouges, 18 cases noires et le 0 qui est systématiquement perdant. On considère que X_n est la variable aléatoire "la boule tombe sur une case rouge au temps n". Une personne entre au casino avec 100 euros et espère multiplier sa mise par 4.
4.a) S'il joue 1 euro à chaque tour, quelles sont les chances que ce joueur réussisse son pari ? Quelle est son espérance de gain ?
4.b) S'il joue tous ses fonds deux fois d'affilée, quelle sont les chances que ce joueur réussisse son pari ? Quelle est son espérance de gain ?

Exercice 7 – ***Marche aléatoire symétrique.*** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d., de loi commune donnée par :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_n = -1).$$

On note

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Soit $R \in \mathbb{N}^*$. On considère le temps aléatoire

$$T = \inf\{n \geq 1 \,:\, |S_n| = R\}.$$

1. Justifier que T est fini p.s., de deux façons : en voyant $(S_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ comme une chaîne de Markov (et en utilisant la transience), ou comme une martingale (et en utilisant le théorème de Doob : convergence p.s.).
2. Montrer que $M_n = S_n^2 - n$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1,\ldots,X_n)$.
3. Que vaut, pour $n \geq 0$, $\mathbb{E}[S_{n\wedge T}^2] - \mathbb{E}[n \wedge T]$?
3.a) Par quel théorème peut-on justifier que $\mathbb{E}[n \wedge T] \to \mathbb{E}[T]$?
3.b) Par quel théorème peut-on justifier que $\mathbb{E}[S_{n\wedge T}^2] \to \mathbb{E}[S_T^2]$? Que vaut la limite ?
3.c) En déduire la valeur de $\mathbb{E}[T]$.
4. Soit $r,R \in \mathbb{N}^*$. On considère maintenant le temps aléatoire

$$T = \inf\{n \geq 1 \,:\, S_n \in \{-r,R\}\}.$$

4.a) Justifier (en reprenant le raisonnement précédent) que $\mathbb{E}[S_T^2] = \mathbb{E}[T]$.
4.b) En utilisant la martingale $(S_n)_{n\geq 0}$ arrêtée au temps T, déterminer $\mathbb{E}[S_T]$ (s'inspirer de la question 2 : que vaut $\mathbb{E}[S_{n\wedge T}]$? Peut-on passer à la limite ?) et en déduire la loi de S_T.
4.c) En déduire la valeur de $\mathbb{E}[T]$.

Exercice 8 – ***Identité de Wald.*** Soit $X_1,X_2,\ldots$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, intégrable. On note $m = \mathbb{E}[X_1]$. Pour tout $n \geq 0$, on note

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

et on définit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1,\ldots,X_n)$. Soit τ un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, tel que $\tau < \infty$ p.s.. On souhaite, sous diverses hypothèses, prouver l'identité de Wald :

$$S_\tau \text{ est intégrable et } \mathbb{E}[S_\tau] = m\mathbb{E}[\tau].$$

1. En introduisant une martingale, montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}[S_{n\wedge\tau}] = m\mathbb{E}[n \wedge \tau]. \tag{1}$$

2. Que dire de la convergence du membre de droite de (1) ?
3. On suppose que $X_k \geq 0$ pour tout k. Que dire alors de la convergence du membre de gauche de (1) ? Conclure.
4. On ne suppose plus les X_k positifs, mais on suppose τ intégrable : $\mathbb{E}[\tau] < \infty$.
4.a) Montrer que, pour tout n,

$$|S_{n\wedge\tau}| \leq Z = |X_1| + \cdots + |X_\tau|.$$

4.b) Justifier que Z est intégrable (on pensera à la question 3).
4.c) Conclure.