Licence 3 MAEF, Semestre 5 *Université Paris 13*
Équations et systèmes différentiels 2017/2018

Bastien Mallein
`mallein@math.univ-paris13.fr`

TD 2 : Transformation d'équations différentielles non-linéaires

Nota Bene. Le TD commence à l'Exercice 1, les exercices à numéro négatifs ne servent qu'à tester sa capacité technique et calculatoire, et sont à réaliser éventuellement sur son propre temps libre.

Exercice -2 (Quelques échauffements)**.**

1. Soit $f : x \mapsto x^2 \log x$, calculer f', f'' et f'''.
2. Calculer la dérivée de $x \mapsto \mathrm{Arctanh}(x)$ grâce à la formule de dérivation de l'inverse.
3. Calculer la dérivée de $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(\log x)$.
4. Calculer la dérivée de $x \mapsto \sin(\cos(x^2))$.

Exercice -1 (Petite mise en jambe)**.**

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}$.
2. Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
3. Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-x-2}$.

Exercice 0 (Des équations différentielles linéaires pour se tester)**.** Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles linéaires suivantes :

1. $y' + 2y = e^t + e^{-2t}$
2. $y' + \sin(t)y = 4\sin(t)$
3. $(t^3 + 1)y' + 3t^2 y = 3t^3 + 1$
4. $ty' - 2y = (t-1)(t+1)^3$
5. $t^3 y' + y = t^4$.

Exercice 1 (Du non-linéaire au linéaire)**.** On se propose de déterminer les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$y' - \frac{y}{t} - y^2 = -9t^2.$$

1. Déterminer $a > 0$ tel que $y_0(t) = at$ est solution de cette équation différentielle.
2. Soit y une solution de l'équation différentielle telle que $y \neq y_0$. Démontrer que $y - y_0$ ne s'annule jamais.
3. Posons alors $z(t) = \frac{1}{y_0(t)-y(t)}$. Démontrer que z est solution de l'équation différentielle
$$z' + \left(6t + \frac{1}{t}\right) z = 1.$$
4. Résoudre l'équation différentielle en z.
5. En déduire les solutions de l'équation différentielle en y. Sur quel intervalle ces solutions sont-elles définies ?

Exercice 2 (Équation de Bernoulli)**.** On va déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{t}y = -(\log t)y^3 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

1. Posons $z(t) = \frac{1}{y(t)^2}$. Montrer que z est solution de l'équation différentielle

$$z' - \frac{1}{t}z = \log t.$$

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle en z.
3. En déduire la solution de l'équation différentielle en y.

Exercice 3 (Équations différentielles linéaires du second ordre)**.** Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - y' - 2y = 0$,
2. $y'' + 4y = t + 1$,
3. $y'' - 2y' + y = \sin(t)^2$,
4. $y'' - 4y' + 3y = (2t + 1)e^{-2t}$.

Exercice 4. On étudie l'équation différentielle

$$t^2y'' - 3ty' + 4y = 0.$$

1. Soit y une solution de cette équation différentielle, on pose $z(t) = y(e^t)$. Calculer $z'(t)$ et $z''(t)$.
2. En déduire que z satisfait sur $\mathbb{R}$ une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants que l'on déterminera.
3. Résoudre cette équation différentielle en z.
4. En déduire la valeur de y sur $\mathbb{R}_+$.
5. En posant $\tilde{z}(t) = y(-e^t)$, résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_-$.
6. Quelles sont les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle en y ?

Exercice 5. On souhaite étudier l'équation différentielle

$$y' = k(t)y\left(1 - y/M(t)\right),$$

avec k et M deux fonctions continues positives. On suppose que $0 < y(0) < M(0)$.

1. Montrer que la fonction $z : t \mapsto 1/y(t)$ est solution de l'équation

$$z' + k(t)z = \frac{k(t)}{M(t)}.$$

2. Donner une formule pour la solution y de cette équation différentielle.
3. En particulier, montrer que si M est une constante, alors

$$y(t) = \frac{M}{1 + CMe^{-\int_0^t k(s)ds}},$$

   avec C une constante générique positive.
4. Si k est une constante et $\lim_{t\to\infty} M(t) = \ell$, montrer que $\lim_{t\to\infty} y(t) = \ell$.
5. On pose $k = 3$ et $M(t) = \frac{1}{2+\cos(t)}$. Déterminer le comportement asymptotique de $y(t)$.