Probabilités Bastien Mallein
Université Paris 8, 2021/2022 `mallein@math.univ-paris13.fr`

TD1 : Tribus, espaces mesurés, liminf et limsup

Exercice 1. Construire un espace de probabilité associé aux expériences aléatoires suivantes.

a) On considère une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5, et on tire successivement 2 boules dans cette urne au hasard.

b) On considère deux urnes, l'une contenant 3 boules numérotées de A à C, et l'autre contenant 5 boules numérotées de A à E. On choisit au hasard une urne, dans laquelle on tire au hasard une boule.

c) On lance un dé à 6 faces le nombre de fois nécessaires pour obtenir un 6, et on s'intéresse au nombre de lancers qui a été nécessaire.

Solution de l'exercice 1.

a) $\Omega = \{1,2,3,4,5\}^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}((i,j) = \frac{1}{20}$ pour tout $i \in [|1,5|]$ et $j \in [|1,5|]\backslash\{i\}$.

b) $\Omega = \{(1,A),(1,B),(1,C),(2,A),(2,B),(2,C),(2,D),(2,E)\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}(1,x) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(2,x) = \frac{1}{10}$.

c) $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}(\{j\}) = (5/6)^{j-1} \times 1/6$.

Exercice 2. On note $\Omega = \{1,\ldots,6\}^2$ l'univers de probabilité correspondant au lancer de deux dés à 6 faces.

a) On note $\mathcal{A}$ la tribu correspondant à l'observation de la parité du résultat du premier dé. Décrire la tribu $\mathcal{A}$.

b) On note $\mathcal{B}$ la tribu correspondant à l'observation du résultat du second dé. Donner une partie génératrice de $\mathcal{B}$.

c) Décrire la tribu $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$. À quelle type de connaissance sur l'expérience aléatoire correspond-t-elle ? Quelle tribu $\mathcal{C}$ peut-on ajouter pour obtenir la connaissance complète du résultat des deux dés.

Solution de l'exercice 2.

a) On a $\mathcal{A} = \sigma(\{1,3,5\} \times \{1,2,3,4,5,6\})$.

b) On a $\mathcal{B} = \{\{1,2,3,4,5,6\} \times B, B \subset \{1,2,3,4,5,6\}\}$.

c) $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ correspond à la connaissance de la parité du résultat du premier dé, et du résultat du second dé. En ajoutant par exemple la connaissance de la valeur modulo 3 du résultat du premier dé, on obtiendrait la connaissance complète de l'expérience aléatoire.

Exercice 3. Soit Ω un univers de probabilité, on note $(A_1,\ldots A_n)$ une partition de Ω, c'est-à-dire une famille d'événements deux à deux disjoints tels que $\bigcup_{j=1}^n A_j = \Omega$. Quel est le cardinal de $\sigma(A_1,\ldots A_n)$?

Solution de l'exercice 3. On montre que $\sigma(A_1, \dots A_n) = \{\cup_{j \in J} A_j, J \subset \{1, \dots n\}\}$, c'est-à-dire que les ensembles mesurables de la tribu sont en bijection avec les sous-ensembles de $\{1, \dots n\}$. Comme il y a 2^n sous-ensemble d'un ensemble à n éléments, on obtient $\#\sigma(A_1, \dots, A_n) = 2^n$.

Exercice 4. On jette successivement trois pièces de monnaie, et on s'intéresse aux côtés qu'elles montrent.

a) Construire un espace de probabilité associé à cette expérience aléatoire.

b) On considère les trois événements A : « la première pièce est tombée sur face », B : « la deuxième pièce est tombée sur face » et C : « la troisième pièce est tombée sur face ».

   i) Donner une description de l'événement $A \cup B^c$.

   ii) Écrire, grâce aux événements A, B et C et des opérations ensemblistes l'événement D : « la première et la troisième pièce montrent des côtés différents ».

   iii) Calculer la probabilité des événements $A \cup B^c$ et D.

c) Une deuxième personne arrive et observe le résultat des trois pièces de monnaie sur la table sans connaître l'ordre dans lequel elles ont été lancées.

   i) Donner la tribu $\mathcal{G}$ associée à la connaissance de cette seconde personne.

   ii) Calculer la probabilité des différents événements de cette tribu.

   iii) L'événement B appartient-t-il à $\mathcal{G}$? Et $A \cup B \cup C$?

Solution de l'exercice 4.

a) On pose $\Omega = \{P, F\}^3$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/8$ pour tout $\omega \in \Omega$.

b) i) $A \cup B^c$ correspond à l'événement « la première pièce est tombée sur face, ou la deuxième est tombée sur pile ».

   ii) On a $D = (A \cap C^c) \cup (A^c \cap C)$.

   iii) On a $\mathbb{P}(A \cup B^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B^c) - \mathbb{P}(A \cap B^c) = 1/2 + 1/2 - 1/4 = 3/4$ et $\mathbb{P}(D) = 1/2$ par des calculs similaires.

c) i) On a

$$\mathcal{G} = \sigma\left(\left\{ \begin{array}{c} \{(P,P,P)\}, \{(P,P,F), (P,F,P), (F,P,F)\}, \\ \{(P,F,F), (F,P,F), (F,F,P)\}, \{(F,F,F)\} \end{array} \right\}\right)$$

   Cette tribu correpond à la connaissance du nombre de pile obtenus, mais pas de leur rang.

   ii) On a $\mathbb{P}(\{(P,P,P)\}) = \mathbb{P}(\{(F,F,F)\}) = 1/8$, et $\mathbb{P}(\{(P,P,F), (P,F,P), (F,P,F)\}) = \mathbb{P}(\{(P,F,F), (F,P,F), (F,F,P)\}) = 3/8$.

   iii) On a $B \notin \mathcal{G}$ mais $A \cup B \cup C = \{(F,F,F)\}^c \in \mathcal{G}$.

Exercice 5. [Union et intersection de tribus]

a) Montrer qu'une intersection de tribus est une tribu, mais qu'une union de tribus n'est pas forcément une tribu.

b) Pour chaque entier n soit $\mathcal{F}_n$ la tribu de $\mathbb{N}$ engendrée par l'ensemble $\{0\}, \{1\}, \dots, \{n\}$. Montrer que $(\mathcal{F}_n)$ est une suite croissante de tribus mais que $\bigcup \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.

Solution de l'exercice 5.

a) Il est facile de vérifier qu'une intersection de tribus est une tribu. Concernant l'union de deux tribus, on peut penser au contre-exemple suivant sur un ensemble E qui contient au moins trois éléments x, y et z. Soit $\mathcal{F} := \{\emptyset, \{x\}, E\backslash\{x\}, E\}$ et $\mathcal{G} := \{\emptyset, \{y\}, E\backslash\{y\}, E\}$. Alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ ne contient pas $\{x, y\} = \{x\} \cup \{y\}$.

b) La tribu $\mathcal{F}_{n+1}$ contient $\{0\}$, $\{1\}$, ..., $\{n\}$. Donc elle contient la tribu engendrée par ces éléments (on rappelle que la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ est la plus petite tribu qui contient $\mathcal{C}$). En revanche $\cup_n \mathcal{F}_n$ ne contient pas $2\mathbb{N} = \cup_{n\geq 0}\{2n\}$.

Exercice 6. [Restriction d'une tribu] Soient $\mathcal{F}$ une tribu sur E et B un élément de $\mathcal{F}$. Montrer que $\mathcal{F}_B := \{A \cap B, A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu de B.

Solution de l'exercice 6. Il s'agit simplement de vérifier que $\mathcal{F}$ vérifie tous les axiomes d'une tribu.

Exercice 7. [Tribu image réciproque] Soit E un ensemble et $(F, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Soit $f : E \to F$ une application.

a) On définit

$$\mathcal{E} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}\}.$$

Montrer que $\mathcal{E}$ est une tribu sur E. On l'appelle la tribu image réciproque de $\mathcal{F}$ par f.

b) Vérifier qu'il s'agit de la plus petite tribu sur E qui rende f mesurable de E dans $(F, \mathcal{F})$.

c) Soit Y un ensemble fini muni de la tribu $\mathcal{P}(Y)$ constituée de toutes les parties de Y. Soit $g : (E, \mathcal{E}) \to (Y, \mathcal{P}(Y))$ une application mesurable. Montrer qu'il existe $h : (F, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{P}(Y))$ mesurable tel que $g = h \circ f$.

Solution de l'exercice 7.

a) Pour tout $A \in \mathcal{E}$, il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $f^{-1}(B) = A$. Alors $A^c = f^{-1}(B^c)$ et donc $A^c \in \mathcal{E}$. Soit A_n une suite d'éléments de $\mathcal{E}$. Alors il existe B_n, éléments de $\mathcal{F}$ tels que $A_n = f^{-1}(B_n)$ et l'on a $\cup_n A_n = f^{-1}(\cup_n B_n)$ ainsi $\cup_n A_n \in \mathcal{E}$.

b) Soit $\mathcal{G}$ une tribu sur E qui rend f mesurable. Alors pour tout $B \in \mathcal{F}$, on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{G}$. Ainsi $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$. Comme $\mathcal{E}$ est une tribu, on en déduit que $\mathcal{E}$ est l'intersection de toutes les tribus qui rendent f mesurable.

c) Pour tout $y \in Y$ on introduit $A_y = g^{-1}(\{y\})$. Nécessairement $A_y \in \mathcal{E}$. On voit alors que $\cup_y A_y = E$ et que pour tout $x \in A_y$, $g(x) = y$.
Par définition de $\mathcal{E}$, on peut trouver $B_y \in \mathcal{F}$ tel que $f^{-1}(B_y) = A_y$. Il serait alors naturel de poser pour tout $x \in B_y$, $h(x) = y$. Malheureusement il se peut que les B_y ne soient pas disjoints. Cependant, les points x qui appartiennent à deux B_y distincts sont forcément des points qui ne sont pas atteints par l'application f. On peut donc leur assigner une valeur arbitraire par h. On choisit donc $y_0 \in Y$ arbitraire et l'on introduit $I = \cup_{y\neq y'} B_y \cap B_{y'}$ et $C = F\backslash(\cup_y B_y)$. On note que ces des ensembles sont dans $\mathcal{F}$. On pose alors pour tout $x \in I \cup C$, $h(x) = y_0$ et pour tout $x \in B_y\backslash I$, $h(x) = y$. On vérifie aisément que h est mesurable de $(F, \mathcal{F})$ dans $(Y, \mathcal{P}(Y))$, et que l'on a bien

$$g = h \circ f.$$

Exercice 8. [Tribu dyadique] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathcal{B}_n = \sigma\left(\{(k/2^n, (k+1)/2^n], 0 \leq k \leq 2^n - 1\}\right).$$

a) Décrire la tribu $\mathcal{B}_n$.

b) Montrer que la tribu engendrée par $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n$ est la tribu des boréliens de l'intervalle $[0,1]$.

Solution de l'exercice 8.

a) On observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{B}_n = \{\cup_{k\in J}(k/2^n, (k+1)/2^n], J \subset \{1, \dots, 2^n\}\}\,.$$

En effet, c'est une tribu qui contient bien tous les ensembles de la forme $(k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$, et toute tribu contenant ces ensembles contiendra également $\mathcal{B}_n$ par stabilité par union dénombrable.

b) Il est évident que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la tribu $\mathcal{B}_n$ est incluse dans la tribu des borélien (qui contient en particulier tous les intervalles de la forme $(k/2^n, (k+1)/2^n]$). Réciproquement, soit $a < b$, on remarque que

$$(a, b) = \cup_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k: a<k2^{-n} \text{ et } (k+1)2^{-n}<b} (k/2^n, (k+1)/2^n],$$

donc la tribu engendrée par $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n$ contient tous les intervalles ouvert, et donc la tribu borélienne par définition.

Exercice 9. [Limsup et liminf de suites] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels, on pose

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k.$$

a) Montrer que $\limsup_{n\to\infty} a_n$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$, en autorisant les valeurs d'adhérence infinies.

b) Vérifier que a_n converge vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si et seulement si

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \ell.$$

c) Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ une autre suite de réels. Montrer que

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

A-t-on toujours $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$?

Solution de l'exercice 9.

a) Soit ℓ une valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$. On a, pour une sous-suite (n_i), la convergence $a_{n_i} \to \ell$ quand $i \to \infty$. Nécessairement pour tout $i \geq 1$

$$\inf_{k\geq n_i} a_k \leq a_{n_i} \leq \sup_{k\geq n_i} a_k,$$

et donc par passage à la limite sur i on en déduit que $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \ell \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Montrons à présent que $\limsup_{n\to\infty} a_n$ est une valeur d'adhérence. On définit n_1 comme le premier rang $k \geq 0$ pour lequel $a_k \geq \sup_{k\geq 0} a_k - 1$. Puis récursivement, on définit n_i

comme le premier rang $k > n_{i-1}$ pour lequel $a_k \geq \sup_{k>n_{i-1}} a_k - 1/i$. La suite (n_i) est bien définie et tend vers $+\infty$. Par ailleurs on a

$$\sup_{k>n_{i-1}} a_k \geq a_{n_i} \geq \sup_{k>n_{i-1}} a_k - 1/i.$$

En passant à la limite sur i on voit que les membres de droite et de gauche convergent vers $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k$. On en déduit que (a_{n_i}) converge vers $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

b) On sait que a_n converge vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si et seulement si sa plus petite et sa plus grande valeur d'adhérence coincident. Par la question précédente, ceci est équivalent à $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \ell$.

c) Pour tout $n \geq 0$ et $k \geq n$, on a $a_k + b_k \leq \sup_{j\geq n} a_j + \sup_{j\geq n} b_j$. Par conséquent,

$$\sup_{k\geq n}(a_k + b_k) \leq \sup_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k,$$

et on obtient l'inégalité en passant à la limite. En règle général, on n'a pas d'égalité. Par exemple, en posant $a_n = (-1)^n$ et $b_n = -a_n$, on a alors $a_n + b_n = 0$ pour tout $n \geq 0$. Mais $\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = 1$.