Probabilités Bastien Mallein
Université Paris 8, 2021/2022 mallein@math.univ-paris13.fr

TD3 : Variables aléatoires et leurs lois

Exercice 1. [Début en douceur] Soit $(E, \mathcal{E}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité.

a) Grâce au théorème de convergence monotone, montrer que si (X_n) est une suite de variables aléatoires positives, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n\right)$.

b) Grâce au théorème de convergence dominé, montrer que si (X_n) est une suite de variables aléatoires, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}\left(|X_n|\right) < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n\right).$$

c) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$.

Solution de l'exercice 1.

a) On observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbf{E}(\sum_{j=1}^n X_j) = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(X_j)$. De plus, la suite $\left(\sum_{j=1}^n X_j\right)$ est croissante, par conséquent

$$\mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^\infty X_n\right) = \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n X_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(X_j) = \sum_{n=1}^\infty \mathbf{E}(X_n).$$

b) Grâce à la question précédente, on a

$$\mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^\infty |X_j|\right) = \sum_{j=1}^\infty \mathbf{E}(|X_j|) < \infty;$$

donc $Z = \sum_{j=1}^\infty |X_j|$ est une variable aléatoire intégrable, donc finie p.s. On en déduit que $\sum_{j=1}^n X_j$ converge presque sûrement, et de plus

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{j=1}^n X_j\right| \leq Z,$$

par conséquent on peut appliquer le théorème de convergence dominée, qui montre que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n\right).$$

c) On fixe l'espace de probabilité $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ et on pose $X_n : \omega \in [0,1] \mapsto -\omega^{2k} \ln \omega$. Grâce à la question a), on a

$$\int_0^1 \frac{-\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n\geq 0} -x^{2k} \ln(x)\mathrm{d}x = \mathbf{E}\left(\sum_{n\geq 0} X_n\right) = \sum_{n=0}^\infty \mathbf{E}(X_n).$$

Par intégration par parties, on a $\mathbf{E}(X_n) = \frac{1}{(n+1)^2}$, on obtient donc $\int_0^1 \frac{-\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2. [Une formule d'espérance]

a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, montrer que $\mathbf{E}(X) = \sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(X \geq n)$.

b) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[0, \infty)$, montrer que $\mathbf{E}(Y) = \int_0^\infty \mathbf{P}(Y > t)\mathrm{d}t$.

c) Plus généralement, montrer que si g est une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $g(0) = 0$, montrer que $\mathbf{E}(g(Y)) = \int_0^\infty g'(t)\mathbf{P}(Y > t)\mathrm{d}t$.

Solution de l'exercice 2. Il s'agit d'applications de la formule de Fubini-Tonelli, en effet

a) $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^\infty \mathbb{1}_{\{j\leq X\}}\right) = \sum_{j=1}^\infty \mathbf{E}(\mathbb{1}_{\{j\leq X\}}) = \sum_{j=1}^\infty \mathbf{P}(X \geq j)$.

b) $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{t<Y\}}\mathrm{d}t\right) = \int_0^\infty \mathbf{P}(Y > t)\mathrm{d}t$.

c) $\mathbf{E}(g(Y)) = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty g'(t)\mathbb{1}_{\{t<Y\}}\mathrm{d}t\right) = \int_0^\infty g'(t)\mathbf{P}(Y > t)\mathrm{d}t$.

Exercice 3. [Inégalité de Markov] Soit X une variable aléatoire positive et $a > 0$.

a) Montrer que $\mathbf{P}(X \geq a) \leq \mathbf{E}(X)/a$ pour tout $a > 0$.

b) En déduire que si $\mathbf{E}(X) = 0$ alors $X = 0$ p.s.

c) En déduire que si $\mathbf{E}(X) < \infty$ alors $X < \infty$ p.s.

Solution de l'exercice 3.

a) On a $X \geq a\mathbb{1}_{\{X\geq a\}}$, par conséquent $\mathbf{E}(X) \geq \mathbf{E}(a\mathbb{1}_{\{X\geq a\}}) = a\mathbf{P}(X \geq a)$.

b) On a $\mathbf{P}(X > 0) = \mathbf{P}\left(\cap_{n\geq 1}\left\{X > \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X > 1/n) \leq \lim_{n\to\infty} n\mathbf{E}(X) = 0$.

c) On a $\mathbf{P}(X = \infty) = \mathbf{P}\left(\cap_{n\geq 1}\{X > n\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X > n) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X)/n = 0$.

Exercice 4. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, on se donne une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{R}$ de loi $(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$. Calculer la loi de la variable aléatoire $1/N^2$.

Solution de l'exercice 4. Soit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a par symétrie

$$\mathbf{E}(F(N^{-2})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} F\left(\frac{1}{x^2}\right)e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}_+^*} F\left(\frac{1}{x^2}\right)e^{-x^2/2}\mathrm{d}x.$$

Et $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^{-2} \in \mathbb{R}_+^*$ est un C^1 difféomorphisme de Jacobien $-2x^{-3}$ donc d'après la formule du changement de variables, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} F\left(\frac{1}{x^2}\right)e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+^*} F(u)e^{-1/(2u)}(2u^{3/2})^{-1}\mathrm{d}u.$$

Donc la loi de $1/N^2$ est $\frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}}e^{-1/(2u)}\mathbb{1}_{\{u>0\}}\mathrm{d}u$.

Exercice 5. [Le retour de Borel-Cantelli] Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité et $(A_n, n \geq 1)$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$.

a) Montrer que si $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(A_n) < \infty$ alors $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$.

b) Montrer que si (A_n) est une suite de variables indépendantes avec $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(A_n) = \infty$, alors $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 1$. On pourra calculer $\mathbf{P}(\cap_{j\geq n} A_j^c)$.

c) Soit $\alpha \in (0,1]$ et (Z_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que Z_n est de loi de Bernoulli de paramètre $n^{-\alpha}$. Montrer que $Z_n \to 0$ dans L^1, mais que $Z_n \not\to 0$ p.s.

d) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, avec $\mathbf{E}(|X_1|) = +\infty$.

   i) Montrer que $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(|X_1| \geq n) = \infty$.

   ii) En déduire que $\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{n} = \infty$.

   iii) On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Conclure que S_n/n diverge p.s.

Solution de l'exercice 5.

a) C'est le lemme de Borel-Cantelli, on pose $N = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}$, qui est une variable aléatoire intégrable ($\mathbf{E}(N) = \sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(A_n) < \infty$), donc est finie presque sûrement. Par conséquent $\mathbf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \mathbf{P}(N = \infty) = 0$.

b) Par indépendance, on a

$$\mathbf{P}(\cap_{j=n}^{\infty} A_j^c) = \prod_{j=n}^{\infty} \mathbf{P}(A_j^c) = 0,$$

car $\sum_{j=n}^{\infty} -\log \mathbf{P}(A_j^c) = \infty$. On obtient donc

$$\mathbf{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{j\geq n} A_j^c) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\cap_{j\geq n} A_j^c) = 0,$$

dès lors $\mathbf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1 - \mathbf{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n^c) = 1$.

c) On observe aisément que $\mathbf{E}(Z_n) = n^{-\alpha} \to 0$, donc $Z_n \to 0$ dans L^1. En revanche, grâce au lemme de Borel-Cantelli, on a

$$\mathbf{P}(\limsup_{n\to\infty} Z_n = 1) = \mathbf{P}(\limsup_{n\to\infty} \{Z_n = 1\}) = 1,$$

puisque $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(Z_n = 1) = \infty$.

d) i) On observe que $|X_1| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{j\leq |X_1|\}}$, donc par théorème de Fubini-Tonelli,

$$\mathbf{E}(|X_1|) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(|X_1| \geq j).$$

   On conclut que $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(|X_1| \geq n) = \infty$.

   ii) On utilise a nouveau le lemme de Borel-Cantelli, on a $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(|X_n|/n \geq A) = \infty$ p.s. par conséquent $\limsup_{n\to\infty} |X_n|/n = \infty$.

   iii) C'est immédiat.

Exercice 6. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, on se donne (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

a) On suppose que la loi de (X, Y) est $\lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \min(X, Y)$.

b) On suppose que la loi de (X, Y) est $\frac{1}{4\pi} e^{-x/2} \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}} \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $(\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y))$.

c) On suppose que la loi de (X,Y) est $\frac{1}{2\pi}\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Calculer la loi de la variable aléatoire réelle $\frac{X}{Y}$.

Solution de l'exercice 6.

a) Soit $F:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(F(U)) &= \lambda\mu\int_{\mathbb{R}_+^2} F(\min(x,y))e^{-(\lambda x+\mu y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \lambda\mu\int_{\{0\le x\le y\}} F(x)e^{-(\lambda x+\mu y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\lambda\mu\int_{\{0\le y\le x\}} F(y)e^{-(\lambda x+\mu y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \lambda\int_0^\infty F(x)e^{-\lambda x}\left(\int_x^\infty \mu e^{-\mu y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x+\mu\int_0^\infty F(x)e^{-\mu x}\left(\int_x^\infty \lambda e^{-\lambda y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= (\lambda+\mu)\int_0^\infty F(x)e^{-(\lambda+\mu)x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

La variable aléatoire U est donc exponentielle de paramètre $\lambda+\mu$.

b) Soit $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(F\left(\sqrt{X}\cos(Y),\sqrt{X}\sin(Y)\right)\right) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f(\sqrt{x}\cos(y),\sqrt{x}\sin(y))e^{-x2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f(x\cos(y),x\sin(y))e^{-x^2/2}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

d'après la formule du changement de variables utilisée avec le C^1-diffómorphisme suivant : $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi]\mapsto(\sqrt{x},y)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi]$. Puis d'après la formule du passage en coordonnées polaires, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f(x\cos(y),x\sin(y))e^{-x^2/2}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(u,v)e^{-(u^2+v^2)/2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

La loi de $(\sqrt{X}\cos(Y),\sqrt{X}\sin(Y))$ est donc $(2\pi)^{-1}e^{-(u^2+v^2)/2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

c) Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ borélienne. On a

$$\mathbf{E}\left(g\left(\frac{X}{Y}\right)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x}{y}\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Et $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\mapsto(x/y,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ est un C^1-difféormorphisme de jacobien y^{-1}. Donc d'après la formule de changements de variables puis le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x}{y}\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x}{y}\right)|y|\,e^{-\frac{y^2}{2}(\frac{x^2}{y^2}+1)}|y|^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^2} g\left(u\right)|v|\,e^{-\frac{v^2}{2}(u^2+1)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &= \int_{\mathbb{R}} g(u)\left(\int_{\mathbb{R}}|v|\,e^{-\frac{v^2}{2}(u^2+1)}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u=2\int_{\mathbb{R}} g(u)\frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbf{E}\left(g\left(\frac{X}{Y}\right)\right)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} g(u)\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u,$$

la loi de X/Y est la loi de Cauchy, c'est-à-dire la loi de densité $(\pi(1+x^2))^{-1}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 7. [Lois exponentielles] Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a. i. i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

a) Montrer que $\limsup_{n\to\infty} X_n/\ln(n) = 1$ p.s.

b) On pose $Z_n = \max(X_1, ..., X_n)/\ln(n)$, montrer que $\liminf_{n\to\infty} Z_n \geq 1$ p.s.

c) En déduire que $\lim_{n\to\infty} Z_n = 1$ p.s.

Solution de l'exercice 7.

a) Pour tout $\epsilon > 0$, on a $\mathbf{P}(X_n > (1+\epsilon)\log n) = n^{-(1+\epsilon)}$. On applique le lemme de Borel-Cantelli en utilisant $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(X_n/\log n > 1+\epsilon) < \infty$, donc

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} \leq 1+\epsilon \quad \text{p.s.}$$

De la même façon, pour tout $\epsilon \in (0,1)$ on a $\mathbf{P}(X_n > (1-\epsilon)\log n) = n^{-(1-\epsilon)}$ donc $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(X_n/\log n > 1-\epsilon) = \infty$, par conséquent

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} \geq 1-\epsilon \quad \text{p.s.}$$

En passant à la limite $\epsilon \to 0$, on obtient $\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1$ p.s.

b) On calcule

$$\mathbf{P}(Z_n \leq (1-\epsilon)\log n) = \mathbf{P}(X_1 \leq (1-\epsilon)\log n)^n = \left(1 - \frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)^n \leq e^{-n^\epsilon}.$$

On a $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(Z_n \leq (1-\epsilon)\log n) < \infty$, on obtient donc

$$\liminf_{n\to\infty} Z_n/\log n \geq 1 \quad \text{p.s.}$$

c) Supposons par l'absurde que $\liminf_{n\to\infty} Z_n/\log(n) > 1+\delta$ avec probabilité positive. Il existerait alors une sous-suite n_k telle que $Z_{n_k}/\log(n_k) \to \rho$, avec $\rho > 1$. En utilisant la croissance de Z_n, on en déduit qu'il existerait une suite $m_k \leq n_k$ croissant vers l'infini telle que $\liminf_{k\to\infty} X_{m_k}/\log(m_k) > \rho$, ce qui est en contradiction avec la question a).

Exercice 8. On définit sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, p\}$.

a) Trouver la loi de $M_n = \max_{1\leq k\leq n} U_k$.

b) Montrer que $\lim_{p\to\infty} \frac{\mathbf{E}[M_n]}{p} = \frac{n}{n+1}$.

Solution de l'exercice 8.

a) Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, on a,

$$\mathbf{P}(M_n \leq k) = \mathbf{P}(U_1 \leq k, \ldots, U_n \leq k) = \mathbf{P}(U_1 \leq k) \ldots \mathbf{P}(U_n \leq k) = \mathbf{P}(U_1 \leq k)^n = \left(\frac{k}{p}\right)^n.$$

On en déduit la loi de M_n :

$$\mathbf{P}(M_n = k) = \mathbf{P}(M_n \leq k) - \mathbf{P}(M_n \leq k-1) = \frac{k^n - (k-1)^n}{p^n}.$$

b) On a $\mathbf{E}(M_n) = \sum_{k=1}^p \mathbf{P}(M_n \geq k)$, donc

$$\frac{E(M_n)}{p} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(1-\left(\frac{k-1}{p}\right)^n\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\left(1-\left(\frac{k}{p}\right)^n\right).$$

On reconnaît une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto 1 - x^n$, dont l'intégrale entre 0 et 1 vaut $n/(n+1)$. D'où le résultat.

Exercice 9. [Formule de compensation] Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de loi μ et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.

a) On suppose que $(X_n, n \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et que N est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. On pose $P = \sum_{i=1}^N X_i$ et $F = N - P = \sum_{i=1}^N (1 - X_i)$.

   i) Déterminer la loi du couple (P, N).

   ii) En déduire les lois de P et F et montrer que P et F sont indépendantes.

b) On ne fait plus d'hypothèse sur les lois. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que $\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^N f(X_i)\right) = \mathbf{E}(N)\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mu(dx)$, avec $\sum_{i=1}^N f(X_i) = 0$ sur $\{N = 0\}$.

Solution de l'exercice 9.

a) i) On a $\mathbf{P}(P = 0, N = 0) = \mathbf{P}(N = 0) = e^{-\lambda}$, et pour $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(P = k, N = n) &= \mathbf{P}\left(N = n, \sum_{i=1}^n X_i = k\right) = \mathbf{P}(N = n)\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = k\right)\\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}.\end{aligned}$$

   ii) On a pour $k, l \geq 0$,

$$\mathbf{P}(P = k, F = l) = \mathbf{P}(P = k, N = k + l) = \left(e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\right)\left(e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^l}{l!}\right).$$

   Donc les variables aléatoires P et F sont indépendantes et de lois respectives les lois de Poisson de paramètres λp et $\lambda(1-p)$.

b) On a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^N f(X_i)\right) &= \mathbf{E}\left(\sum_{n\geq 1}\mathbb{1}_{\{N=n\}}\sum_{i=1}^n f(X_i)\right) = \sum_{n\geq 1}\mathbf{P}(N = n)\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n f(X_i)\right)\\ &= \sum_{n\geq 1}\mathbf{P}(N = n)n\mathbf{E}(f(X_1)) = \mathbf{E}(N)\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx).\end{aligned}$$