Probabilités
Université Paris 8, 2021/2022

Examen de Probabilités
Le 14 décembre 2021
Durée : 2h.
Aucun document n'est autorisé, l'usage de la calculatrice est interdite.

Rappels. Si $(x_n, n \geq 1)$ est une suite de réels, on note

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k \text{ et } \liminf_{n\to\infty} \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k.$$

Si $(A_n, n \geq 1)$ est une suite d'ensembles, on note

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} A_k \text{ et } \liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n\geq 1} \cap_{k\geq n} A_k.$$

Exercice 1. [Questions de cours]

a) Énoncez le théorème de convergence monotone.

b) Énoncez le lemme de Fatou, puis prouvez-le à l'aide du théorème de convergence monotone.

c) Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires positives qui converge vers X, et $p \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\mathbf{E}(X_n^p) \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbf{E}(X^p) < \infty$.

Exercice 2. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $[-1, 1]$. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

a) Montrer que $\mathbf{E}(X_1) = 0$, et calculer $\mathbf{V}\mathrm{ar}(X_1)$.

b) On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Montrer que $\mathbf{E}(S_n) = 0$ et $\mathbf{V}\mathrm{ar}(S_n) = n/3$.

c) Soit $\lambda > 0$.

   i) Montrer que $\mathbf{E}(e^{\lambda X_1}) = \frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2\lambda}$.

   ii) En déduire que $\mathbf{E}\left(e^{\lambda S_n}\right) = \left(\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2\lambda}\right)^n$.

   iii) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$ et $\lambda > 0$, on a $\mathbf{P}(S_n \geq an) \leq \left(e^{-\lambda a}\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{\lambda}\right)^n$.

   iv) Montrer que pour tout $a > 0$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2\lambda} < e^{\lambda a}$. On pourra calculer le développement limité en 0 de $\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2\lambda}$.

   v) En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, p.s. pour tout n assez grand $S_n \leq n\epsilon$.

   vi) Conclure que $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$.

T.S.V.P.

Exercice 3. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a > 0$, on a $\mathbf{P}(X_n > a) = e^{-a}$.

b) i) Soit $\epsilon > 0$, montrer que $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(X_n \geq (1+\epsilon)\ln n) < +\infty$.

ii) En déduire que $\limsup_{n\to\infty} X_n/\ln n \leq 1$ p.s.

c) i) Soit $\epsilon > 0$, montrer que $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(X_n \geq (1-\epsilon)\ln n) = +\infty$.

ii) En déduire grâce au lemme de Borel-Cantelli que $\limsup_{n\to\infty} X_n/\ln n \geq 1$ p.s.

d) On pose $Z_n = \max(X_1, \dots X_n)$.

i) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbf{P}(Z_n \leq a) = (1 - e^{-a})^n.$$

ii) Que vaut, pour $x \in \mathbb{R}$, la quantité $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_n \leq \ln n + x)$?

iii) Montrer que $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(Z_n \leq (1-\epsilon)\ln n) < \infty$. En déduire que $\liminf_{n\to\infty} Z_n \geq 1$ p.s.

e) Montrer que $\lim_{n\to\infty} Z_n = 1$.