Divergence des processus coalescents spatiaux d'après Angel, Berestycki et Limic

Bastien Mallein
sous la direction de Jean Bertoin

10 février 2011

1 Introduction

Lorsqu'on cherche à étudier le patrimoine génétique d'une population, on a souvent besoin de s'intéresser à l'arbre généalogique des individus formant cette population. C'est dans ce but que Kingman a introduit, en 1982, un modèle décrivant la généalogie d'une population [5, 6]. Ce modèle a par la suite été généralisé indépendamment par Pitman [8] et Sagitov [9] à des processus appelés Λ-coalescents. Dans ces modèles, on peut en particulier s'intéresser à la hauteur de cet arbre généalogique, c'est-à-dire à l'âge du plus récent ancêtre commun à une famille de n individus.

Il apparaît que dans de nombreux cas, cet âge est borné indépendamment de n. Ce résultat a été prouvé par Schweinsberg [10] qui a donné une condition nécessaire et suffisante pour la finitude de la hauteur de l'arbre généalogique d'un Λ-coalescent. Le but de ce mémoire est de prouver, comme dans [1], que lorsqu'on autorise les individus à se déplacer sur un graphe infini, alors cette borne n'existe jamais. Plus précisément nous montrerons qu'aucun processus Λ-coalescent spatial sur un graphe infini, partant d'une population infinie en un point ne devient fini en temps fini, et dans certains cas, nous serons même capables de donner un ordre de grandeur du nombre d'ancêtres qui engendrent, en un temps t, une famille de n individus.

Remarque 1.1. Dans tout ce mémoire, nous aurons besoin de nombreuses constantes, que nous appellerons $c, c_1, c_2, \cdots$ et $C, C_1, C_2, \cdots$, souvent respectivement choisies assez petites et assez grandes, qui pourront varier d'une ligne à l'autre de nos équations, par soucis de simplicité.

Je tiens à remercier M. Bertoin qui m'a proposé ce sujet, et m'a apporté son aide pendant la rédaction de ce mémoire, ainsi que Yasmine pour sa relecture attentive.

2 À propos des processus coalescents

Un processus coalescent est un modèle de la généalogie de n individus. C'est un processus stochastique qui à chaque instant t associe la partition de la population selon le critère suivant : deux individus sont dans le même ensemble s'ils ont un ancêtre commun âgé de moins de t, i.e. les lignées ancestrales de l'arbre généalogique se sont regroupées avant la génération $-t$. On appelle ces processus « coalescents » car au cours du temps, les lignées ancestrales se rejoignent et fusionnent en une seule. On peut alors voir ce processus comme un ensemble de particules qui se regroupent en sous-ensembles plus gros à certains instants. Lorsqu'on étudie des modèles mathématiques de populations, comme le modèle de Wright-Fisher, l'un de ces processus coalescents revient très souvent pour en donner la généalogie, c'est le coalescent de Kingman.

Ce modèle suppose que durant l'évolution, les coagulations de lignées ancestrales se font de manière microscopique, c'est-à-dire que seuls deux individus sont concernés par un épisode de coagulation. Ce processus a par la suite été généralisé en autorisant des évolutions plus brusques dans les lignées ancestrales. Ces processus sont appelés des Λ-coalescents. Nous allons commencer par citer les principaux résultats que nous démontrerons ici, puis après quelques notations qui nous permettront d'écrire de manière plus précise ce qu'est un processus à valeurs dans les espaces de partitions, nous introduirons tous ces processus coalescents, ainsi qu'une de leurs propriétés que nous nous proposons d'étudier ici : l'existence d'un ancêtre commun à toute la population. Par la suite nous étendrons ce genre de notions en permettant aux individus de se déplacer sur un graphe.

2.1 Principaux résultats

Nous présenterons ici quelques résultats de l'étude des processus coalescents obtenus par Angel, Berestycki et Limic dans leur article [1], portant sur l'étude de l'existence d'un ancêtre commun dans les processus coalescents spatiaux. Le premier théorème auquel nous nous intéresserons concerne le coalescent de Kingman spatial, pour lequel on peut donner un ordre de grandeur du nombre d'ancêtres de la famille en remontant de t dans le temps, ou autrement dit du nombre de particules présentes à l'instant t.

Commençons par définir la fonction $\log^* n$ ou fonction logarithme itérée. Elle est définie de la manière suivante :

$$\log^* n = \min\{k \in \mathbb{N} : \log^{(k)} n < 1\},$$

où on a posé $\log^{(k)} n = \underbrace{\log \circ \cdots \circ \log}_{\text{k termes}} n$.

Cette fonction diverge vers $+\infty$, mais de manière extrêmement lente. On sait par exemple que pour tout $n < 10^{1656520}$, $\log^* n$ est inférieur ou égale à 4.

Théorème 2.1. *Considérons le coalescent de Kingman spatial sur un graphe infini G de degré maximal fini D partant de n individus tous situés en $u \in G$. Posons N_t^n le nombre d'individus présents à l'instant $t > 0$, il existe deux constantes $c, C > 0$ dépendant uniquement de D et t telles que pour tout $\varepsilon > 0$ on ait :*

$$\mathbb{P}\big(c \operatorname{Vol}[B(u, (1-\varepsilon)\log^* n)] \leq N_t^n \leq C \operatorname{Vol}[B(u, (1+\varepsilon)\log^* n)]\big) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1,$$

On obtient donc la divergence vers l'infini de la taille de la population au temps t lorsqu'on part de $n \to +\infty$ individus à l'origine, ce qui est bien différent du comportement qu'adopte le coalescent non-spatial. Un résultat similaire peut aussi être démontré dans le cas des processus Beta-coalescents spatiaux, pour lesquels on a encore une estimation du nombre d'individus restants à un instant donné.

Théorème 2.2. *Soit $1 < \alpha < 2$, et considérons un Beta$(\alpha, 2-\alpha)$-coalescent spatial sur un graphe infini G de degré maximal fini D partant de n individus tous situés en $u \in G$. Posons N_t^n le nombre d'individus présents à l'instant $t > 0$, il existe deux constantes $c, C > 0$ dépendant uniquement de α, D et t telles que :*

$$\mathbb{P}\big(c\,\mathrm{Vol}[B(u, c\log\log n)] \leq N_t^n \leq C\,\mathrm{Vol}[B(u, C\log\log n)]\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

Plus généralement, nous pouvons prouver que pour n'importe quel processus Λ-coalescent spatial (Λ sans masse de Dirac en 1) sur un graphe infini , la taille de la famille au temps t diverge.

Théorème 2.3. *Soit Λ une mesure finie sur $[0,1[$ et considérons le processus Λ-coalescent spatial sur un graphe infini G partant de n individus tous situés en $u \in G$. Soit N_t^n le nombre d'individus restants à l'instant $t > 0$, on a :*

$$N_t^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \ p.s.$$

Finalement, nous pouvons également nous intéresser au nombre de lignées généalogiques persistant sur le long terme, particulièrement dans le cas où le graphe G est de la forme $\mathbb{Z}^d$, pour lequel, grâce aux propriétés asymptotiques sur la taille des boules, les résultats précédents s'écrivent bien plus facilement. Nous avons alors l'estimation suivante :

Théorème 2.4. *Supposons que le coalescent que nous considérons est le coalescent de Kingman sur $G = \mathbb{Z}^d$, posons $m_n = \log^* n$ et $\delta > 0$ fixé. Il existe deux constantes $c, C > 0$ dépendant uniquement de d, δ telles que si $d > 2$:*

$$\mathbb{P}\left(c m_n^{d-2} \leq N_{\delta m_n^2}^n \leq C m_n^{d-2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

et si $d = 2$:

$$\mathbb{P}\left(c\log m_n \leq N_{\delta m^2}^n \leq C\log m_n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Si le coalescent considéré est un Beta$(\alpha, 2-\alpha)$ coalescent, nous avons le même résultat en prenant $m_n = \log\log n$.

En réalité dans ce dernier théorème, le fait que le coalescent considéré soit de Kingman influe uniquement sur l'étalement initial des individus. Ensuite sur un temps long, la probabilité de trouver simultanément deux individus en un même sommet du graphe devient faible, et ceux-ci fusionnent avec une certaine probabilité, ne dépendant que de $\Lambda([0,1])$. Voir plus de deux individus sur un même sommet est encore plus rare, donc on ne peut pas réellement différencier un coalescent de l'autre sur un temps long, et le comportement de tout coalescent devient donc similaire à celui du coalescent de Kingman.

Pour démontrer ces résultats, les processus que nous aurons réellement besoin d'étudier sont ceux donnant le nombre de blocs d'un processus coalescent, c'est-à-dire le nombre d'ancêtres communs à la génération $-t$ du processus. Nous présenterons toutefois les processus à valeurs dans les espaces de partitions, car les objets sont alors plus intuitive, en particulier la notion de limite projective nous permettra de définir un processus recouvrant tous les autres. Commençons par quelques résultats sur les espaces de partitions.

2.2 Quelques notions sur les espaces de partitions

Commençons par énumérer les individus que nous considérons à l'instant initial. Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs. On notera $[n]$ l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$, qui correspondra donc à une population de n individus que nous souhaitons étudier.

Une partition de $B \subset \mathbb{N}$ est une collection $\pi = (\pi_i, i \in \mathbb{N})$ de sous-ensembles disjoints de B tels que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \pi_i = B$, indexés selon l'ordre croissant de leur plus petit élément, i.e. :

$$\forall i \leq j, \min \pi_i \leq \min \pi_j,$$

avec la convention $\min \emptyset = +\infty$. Le bloc π_i représentera l'individu qui est l'ancêtre commun de chacun des individus dont le numéro est dans π_i, et aucun des autres.

On dira que $B' \subset B$ est un bloc de π si c'est un élément non-vide de π. Une partition π est dite plus fine qu'une autre π' si chaque bloc de π est inclus dans un bloc de π'. Dans ce cas on dit également que π' est plus grossière que π.

L'ensemble des partitions de B est noté $\mathcal{P}_B$, et on écrira également $\mathcal{P}_n$ pour $\mathcal{P}_{[n]}$ et $\mathcal{P}_\infty$ pour $\mathcal{P}_{\mathbb{N}^*}$. L'un des éléments remarquables de cet ensemble est la partition en singletons $(\{1\}, \{2\}, \cdots)$, notée $\mathbf{0}_n \in \mathcal{P}_n$ ou $\mathbf{0}_\infty \in \mathcal{P}_\infty$. Le nombre de blocs d'une partition π est le cardinal de l'ensemble des blocs (non-vides par définition) de π, noté $\#\pi$:

$$\#\pi = \#\{i \in \mathbb{N}^* | \pi_i \neq \emptyset\} = \max\{i \in \mathbb{N}^* | \pi_i \neq \emptyset\}.$$

Si B' est un sous-ensemble de B, toute partition $\pi \in \mathcal{P}_B$ induit naturellement une partition sur B' notée $\pi_{|B'}$ et définie par :

$$\pi_{|B'} = (\pi_i \cap B', i \in \mathbb{N}) \text{ convenablement réordonnée.}$$

On définit alors la notion de compatibilité de partitions. Si $B' \subset B$, $\pi' \in \mathcal{P}_{B'}$ et $\pi \in \mathcal{P}_B$ sont dites compatibles si et seulement si on a $\pi' = \pi_{|B'}$. On peut alors définir la limite projective d'une suite de partitions compatibles au sens suivant.

Si $\pi^1, \pi^2, \cdots$ sont des partitions de $[1], [2], \cdots$, elles sont dites compatibles si pour toute paire d'entiers $p \leq n$, $\pi^n_{|[p]} = \pi^p$. On peut alors prouver sans difficulté le lemme suivant, qui nous servira par la suite à construire nos processus coalescents.

Lemme 2.1. *Soient $\pi^1, \pi^2, \cdots$ des partitions de $[1], [2], \cdots$. On a :*

$$(\pi^n)_{n \in \mathbb{N}^*} \textit{ compatibles} \iff \exists \pi \in \mathcal{P}_\infty | \forall n \in \mathbb{N}^*, \pi^n = \pi_{|[n]}$$

Cette propriété est évidente lorsqu'on représente $\mathcal{P}_\infty$ sous forme des feuilles d'un arbre. Les nœuds au niveau n sont les partions de $\mathcal{P}_n$, et les liens entre nœuds sont définis par la relation de compatibilité. La suite (π^n) représente alors un chemin sur cet arbre, et π est la feuille au bout du chemin.

Nous voyons ainsi qu'il est équivalent de construire un processus à valeurs dans $\mathcal{P}_\infty$, et de construire une suite de processus sur les partitions de $[n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de telle manière que les trajectoires soient toutes compatibles. Nous construirons souvent ainsi nos processus, sur un nombre fini d'individus, puis nous passerons à la limite projective.

On munit maintenant $\mathcal{P}_\infty$ de la distance $d(\pi, \pi') = \dfrac{1}{\max\{p \in \mathbb{N}^* | \pi_{|[p]} = \pi'_{|[p]}\}}$.

Propriété 2.1. *$(\mathcal{P}_\infty, d)$ est un espace métrique compact.*

Preuve. On part de π^n une suite de partitions de $\mathbb{N}$. Nous allons extraire par récurrence une suite de partitions compatible. Posons $n_1 = 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose qu'il existe une infinité d'entiers p tels que $\pi^p_{|[k]} = \pi^{n_k}_{|[k]}$. Parmi cette infinité d'entiers, une infinité d'entre eux ont des restrictions à $k+1$ égales, par principe des tiroirs. On choisit alors n_{k+1} comme le plus petit entier supérieur à n_k tel qu'il existe une infinité d'entiers q tels que $\pi^q_{|[k+1]} = \pi^{n_{k+1}}_{|[k+1]}$ et $\pi^q_{|[k]} = \pi^{n_k}_{|[k]}$.

La suite $(\pi^{n_k}_{|[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de partitions compatible, il existe donc une partition π^∞ de $\mathcal{P}_\infty$. De plus on a $\pi^{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi^\infty$. □

Munissons maintenant l'ensemble des partitions d'une loi de composition interne Coag, qui permettra de réécrire des résultats de coagulation, par :

$$\mathrm{Coag}(\pi, \pi') = \Big(\bigcup_{j\in\pi'_i} \pi_j\Big)_{i\in\mathbb{N}},$$

le résultat de la coagulation de π par π'. Autrement dit un bloc de la coagulation de π par π' est l'union des blocs de π dont l'indice est dans un même bloc de π'.

L'application Coag est 1-lipschitzienne et est compatible avec l'application de restriction. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{Coag}(\pi, \pi')_{|[n]} = \mathrm{Coag}(\pi_{|[n]}, \pi') = \mathrm{Coag}(\pi_{|[n]}, \pi'_{|[n]}).$$

On appelle partition simple une partition dans laquelle il n'existe qu'un seul bloc qui ne soit ni vide, ni un singleton. Soit $\pi \in \mathcal{P}_n$ possédant k blocs et $\sigma \in \mathcal{P}_k$ une partition simple avec un bloc à p éléments, alors la partition $\mathrm{Coag}(\pi, \sigma)$ est appelé une coagulation de p blocs de π. Autrement dit, on choisit p blocs (non-vides) de π et on les réunit en un seul. Cette opération est l'évolution élémentaire d'un Λ-coalescent, chaque évènement de coagulation pourra s'écrire sous cette forme.

Dans toute la suite, si B est un bloc de $\mathbb{N}$ qui n'est pas un singleton, nous noterons σ_B la partition de $\mathcal{P}_\infty$ simple dont le seul bloc non-trivial est B. Par exemple $\sigma_{\{1,2\}} = (\{1,2\}, \{3\}, \{4\}, \cdots)$.

3 Le cas des coalescents non-spatiaux

Nous allons maintenant définir un processus coalescent non-spatial, et étudier quelques-unes de ses propriétés de base avant de nous tourner vers les coalescents spatiaux et les résultats que nous souhaitons démontrer. Certaines des propriétés évoquées ici pourront être utiles par la suite car nous pouvons assez aisément coupler un coalescent spatial avec son pendant non-spatial. Définissons pour commencer le premier de ces coalescents, introduit par Kingman.

3.1 Le coalescent de Kingman

De façon heuristique, le coalescent de Kingman correspond à la généalogie de modèles de populations pour lesquels chaque individu n'engendre à un instant donné qu'une portion infime de la population totale. On dit qu'une partition π' peut être obtenue par coagulation d'une paire de blocs de π si il existe une paire d'entiers $i < j$ tels que $\pi_i, \pi_j \neq \emptyset$ et $\pi' = \mathrm{Coag}(\pi, \sigma_{\{i,j\}})$.

Nous allons maintenant définir le coalescent de Kingman pour un nombre fini d'individus.

Définition 3.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un n-coalescent de Kingman est un processus de Markov $(\Pi^n_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ à valeurs dans $\mathcal{P}_n$ partant d'une partition $\pi_0 \in \mathcal{P}_n$ et possédant la dynamique suivante.

Le taux de transition d'une partition π à une partition pouvant être obtenue comme la coagulation de deux blocs de π est égal à 1, et tous les autres taux sont égaux à 0.

Remarquons que la partition $([n], \emptyset, \emptyset \cdots)$ est un état absorbant de la chaine de Markov. De plus la dynamique peut se résumer à ce qui suit : si à un instant donné nous avons k « lignées » (i.e. $\#\Pi^n_t = k$), à taux $\frac{k(k-1)}{2}$, deux d'entre elles choisies uniformément au hasard se réunissent.

Remarque 3.1. Le processus décrivant le nombre de blocs d'un n-coalescent de Kingman est également un processus de Markov, c'est un processus de mort avec taux de mort au niveau k égal à $\frac{k(k-1)}{2}$ (c'est le nombre de paires de blocs pouvant coaguler). On note ce processus D^n_t dans la suite.

Nous allons maintenant vérifier que les n-coalescents forment une suite de processus de Markov compatibles, c'est-à-dire que la restriction d'un n-coalescent à $[k]$ est un k-coalescent. C'est intuitivement assez évident puisque c'est la généalogie d'une famille de k individu, ayant oublié les $n-k$ autres.

Lemme 3.1. *Pour tout $n \geq 2$, le processus $\Pi^n_{|[n-1]}$ est un $(n-1)$-coalescent de Kingman.*

Preuve. Considérons Π^n un n-coalescent de Kingman partant de la partition π. Lorsqu'on s'intéresse à la restriction de ce processus deux cas se présentent.

Commençons par le cas où le bloc de π contenant n contient également un autre entier $i < n$. Alors de la restriction de Π^n à $\mathcal{P}_{n-1}$ on peut remonter au processus original en ajoutant n à la partition contenant i. Par conséquent, $\Pi^n_{|[n-1]}$ est un processus de Markov avec les mêmes transitions qu'un $n-1$-coalescent partant de $\pi_{|[n-1]}$.

Supposons maintenant que le bloc $\{n\} \in \pi$, et que π possède k blocs. Dans ce cas deux types de sauts peuvent se produire, et l'un d'eux implique un individu qu'on ne peut voir dans le processus restreint. Soit τ le premier instant de saut, et A l'évènement $\{\{n\} \in \Pi^n_\tau\}$ sur lequel l'individu n n'est pas impliqué. Soit τ' le deuxième instant de saut.

Remarquons alors que le premier temps de saut de $\Pi^n_{|[n-1]}$ est $\tilde{\tau} = \tau + \mathbf{1}_{\{A^c\}}\tau'$. De plus, τ est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\frac{k(k-1)}{2}$, A est un évènement indépendant de τ de probabilité $1 - \frac{2}{k}$, et τ' est une variable aléatoire exponentielle indépendante de paramètre $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau + \mathbf{1}_{\{A^c\}}\tau' > s) &= \frac{2}{k}\mathbb{P}(\tau + \tau' > s) + \left(1 - \frac{2}{k}\right)\mathbb{P}(\tau > s) \\
&= \frac{2}{k}\left(\frac{k}{2}e^{-\frac{(k-1)(k-2)}{2}s} - \frac{k-2}{2}e^{-\frac{k(k-1)}{2}}\right) + \left(1 - \frac{2}{k}\right)e^{-\frac{k(k-1)}{2}} \\
&= e^{-\frac{(k-1)(k-2)}{2}s}.
\end{aligned}$$

Le premier instant de saut pour le processus restreint est donc de loi exponentielle de paramètre $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$. De plus $\Pi^n_{|[n-1]_{\tilde{\tau}}}$ est uniforme sur les partitions de $[n-1]$ et indépendant de $\tilde{\tau}$. C'est donc bien le premier saut d'un $n-1$-coalescent de Kingman.

En utilisant la propriété de Markov forte, grâce aux deux cas déjà traités, on obtient bien que $\Pi^n_{[n-1]}$ est un $n-1$-coalescent de Kingman. □

Remarquons en passant que nous pouvons réduire l'étude des coalescents de Kingman aux processus partant de la partition en singletons $\mathbf{0}_n$.

Propriété 3.1. *Soit $\pi_0 \in \mathcal{P}_n$ possédant k blocs, Π^n un n -coalescent de Kingman partant de la partition en singletons et $\Pi^k = \Pi^n_{|[k]}$.*

Le processus $\Pi = \mathrm{Coag}(\pi_0, \Pi^n) = \mathrm{Coag}(\pi_0, \Pi^k)$ est un coalescent de Kingman partant de la partition π_0

Preuve. On a clairement $\Pi_0 = \pi_0$, et les taux de transition correspondent, ce qui prouve notre point. □

En utilisant la propriété de Markov, nous voyons qu'un processus n-coalescent de Kingman arrivé dans un état comportant k blocs se comporte comme un k-coalescent de Kingman, pour lequel les individus sont les blocs du processus arrêté. C'est encore une fois intuitif, nous étudions la généalogie des k ancêtres de notre population de n individus, qui fait bien partie de la généalogie de ces n individus.

Nous allons maintenant utiliser la propriété de compatibilité des n-coalescents, nous pouvons appliquer le théorème d'extension de Kolmogorov pour définir simultanément des n-coalescents compatibles pour tout entier n. Imposons de plus que tous ces processus aient des trajectoires càdlàg. Le Lemme 2.1 nous permet alors de définir le processus obtenu par limite projective vérifiant $\Pi_{t|[n]} = \Pi^n_t$. C'est ce processus qui sera appelé coalescent de Kingman.

Définition 3.2. Il existe un processus, unique en loi, noté Π^K à valeurs dans $\mathbb{P}_\infty$, partant de π, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Pi^K_{|[n]}$ est un n-coalescent de Kingman partant de $\pi_{|[n]}$. Ce processus Π^K est appelé coalescent de Kingman.

Comme dans le cas fini, la coagulation d'une partition π avec un coalescent de Kingman partant de la partition en singletons $\mathbf{0}_\infty$ est un coalescent de Kingman partant de π, encore une fois par limite projective. Posons $D_t = \#\Pi^K_t$ le processus du nombre de blocs du coalescent de Kingman.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'existence de l'ancêtre commun du coalescent de Kingman. Si celui-ci existe, alors son âge est une borne supérieure pour celui de l'ancêtre commun de toute sous-famille finie d'individus.

Remarquons que si à un instant donné le processus arrive dans un état π n'ayant qu'un nombre fini de blocs non-vides k, alors il existe un ancêtre commun, car à partir de cet instant, le processus se comporte comme un k-coalescent de Kingman partant de la partition en singletons, pour lequel on remplace chaque individu par l'un des blocs non-vides de π. Comme l'espace des états de Π^k est fini et que $([k], \emptyset, \emptyset, \cdots)$ est absorbant, Π^K arrive presque sûrement dans l'état $(\mathbb{N}, \emptyset, \emptyset, \cdots)$ en un certain temps.

Théorème 3.1. *Le coalescent de Kingman descend de l'infini presque sûrement, i.e.*

$$\forall t > 0, D_t < +\infty \text{ p.s.}$$

Preuve. Notons $D_t^n = \#\Pi^K_{|[n]_t}$, c'est un processus du nombre de blocs d'un n-coalescent de Kingman, et nous avons de plus :

$$D_t = \lim_{n \to +\infty} D_t^n \text{ p.s.}$$

Soit $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. Connaissant la loi des processus de mort D_t^n, on a :

$$\mathbb{P}(D_t^n \geq k) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=k+1}^{n} \frac{2}{j(j-1)} e_j > t\right) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{2}{j(j-1)} e_j > t\right).$$

Or remarquons que, en utilisant Fubini-Tonelli,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{2}{j(j-1)} e_j\right) = \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{2}{j(j-1)} = 2.$$

Par conséquent la série $\sum \frac{e_j}{j(j-1)}$ converge p.s., ce qui nous donne bien :

$$\mathbb{P}(D_t \geq k) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(D^n \geq k) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{2}{j(j-1)} e_j > t\right).$$

Comme la borne ci-dessus tend vers 0 quand k tend vers l'infini, on obtient bien le résultat escompté. □

Nous obtenons en particulier la loi de l'âge du dernier ancêtre commun du coalescent de Kingman, si on note $T = \inf\{t > 0 | D_t = 1\}$, on a :

$$T \overset{(d)}{=} \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{2}{j(j-1)} e_j.$$

De plus pour tout n-coalescent de Kingman, le temps d'atteinte de 1 pour D^n est dominé par T.

Lorsque nous étudierons le coalescent de Kingman spatial, il sera utile de connaitre son comportement pour de petites valeurs de t. Nous allons donc nous intéresser à la « vitesse de descente de l'infini » du coalescent de Kingman, c'est-à-dire à un équivalent de D_t au voisinage de 0.

Proposition 3.2.

$$\lim_{t \to 0} t D_t = 2 \text{ p.s.}$$

Preuve. On note à nouveau

$$T^n = \inf\{t > 0 | \#\Pi_t^K = n\} \stackrel{(d)}{=} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{2}{j(j-1)} e_j.$$

Dans ce cas nous avons :

$$\mathbb{E}(T^n) = \frac{2}{n} \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(T^n) = \sum_{j=n+1}^{+\infty} \left(\frac{2}{j(j-1)}\right)^2 = O(n^{-3}).$$

Dès lors, nous obtenons rapidement que :

$$\mathbb{P}\left(\left|T^n - \frac{2}{n}\right| > \frac{1}{n \log n}\right) = O\left(\frac{(\log n)^2}{n}\right).$$

Grâce au lemme de Borel-Cantelli, on obtient facilement que :

$$n^2 T^{n^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2 \text{ p.s.}$$

d'où on tire, par un argument de monotonie,

$$n T^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2 \text{ p.s.}$$

Ceci est bien équivalent par monotonie à $\lim_{t \to 0} t \#\Pi_t^K = 2$ p.s. □

Dernier fait à propos du coalescent de Kingman : le fait qu'il descende de l'infini, et sa dynamique sur les partitions possédant un nombre fini de blocs le caractérisent de manière unique. Autrement dit, il existe une unique loi d'entrée de l'infini pour le coalescent de Kingman.

Théorème 3.2. *Il existe un unique (en loi) processus de Markov Π à valeurs dans $\mathcal{P}_\infty$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

- $\lim_{t \to 0} \Pi_t = \mathbf{0}_\infty$ *;*
- Π *descend de l'infini p.s. ;*
- *Le taux de transition d'une partition π comportant un nombre fini de blocs à une partition π' obtenue par coagulation de deux blocs de π est 1 et tous les autres taux sont nuls.*

Preuve. Soit Π un tel processus de Markov. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \inf\{t > 0 | \#\Pi_t = n\}$. C'est une suite décroissante (par la troisième propriété) de temps d'arrêt, finis presque sûrement (par la deuxième propriété), qui tend vers 0 presque sûrement (par la première propriété).

On voit de plus que $(\Pi_{t+T_n})_{t \in \mathbb{R}^+}$ est la coagulation de la partition Π_{T_n} avec un processus n-coalescent de Kingman Γ^n (on remplace les n ancêtres de la population par n individus « neufs »).

On choisit maintenant $k \in \mathbb{N}$. Pour n assez grand, on a $\Pi_{|[k]_{T_n}} = \mathbf{0}_k$, car $T_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\Pi_t \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \mathbf{0}_\infty$. Par conséquent pour n assez grand on a

$$\Pi_{|[k]_{t+T_n}} = \Gamma^n_{|[k]_t}.$$

Par propriété de compatibilité, la restriction de Γ^n à $[k]$ est un k-coalescent de Kingman. Dès lors en prenant la limite pour $n \to +\infty$, on a $\Pi_{|[k]}$ est un k-coalescent de Kingman.

Dès lors Π est un coalescent de Kingman partant de la partition en singletons. □

Passons maintenant à un cas plus général de processus coalescent, pour lequel on autorise un individu à engendrer une grande partie de la population d'un seul coup.

3.2 Cas général de coalescence échangeable et Λ-coalescent

Le coalescent de Kingman est un processus généalogique d'une population de grande taille pour laquelle un individu ne donne naissance qu'à une portion infime de la population totale. Mais pour certaines populations, cette hypothèse est fausse, et une très faible partie de la population parentale peut engendrer une descendance très grande tandis que la plupart des autres individus n'engendrent pas ou très peu d'enfants. C'est le cas par exemple d'une population de virus quand la sélection est très forte, ou bien de certaines espèces marines. Pour modéliser la généalogie de ce type de population, on autorise le regroupement en un seul bloc de plusieurs éléments d'un seul coup. On peut aussi autoriser plusieurs coagulations simultanées.

Dans ce travail, nous nous intéresserons au cas particulier suivant : lorsqu'un évènement de coagulation se présente, tous les blocs impliqués coagulent en un seul bloc (autrement dit, un seul individu a engendré une descendance très nombreuse, mais nous n'autorisons pas plusieurs évènements de coagulation simultanés). Comme précédemment pour le coalescent de Kingman, nous commençons par donner les taux de transition pour une famille finie d'individus.

L'évènement que nous venons de décrire peut être modélisé de la manière suivante : on choisit $x \in]0,1]$ qui sera la portion des blocs coagulant en un seul. Chaque bloc aura une probabilité x d'appartenir au bloc coagulé après l'évènement, et une probabilité $1-x$ de rester disjoint. Cet évènement arrivera à un certain taux donné par une mesure sur $]0,1]$ ν, pour laquelle $\nu(]a,b[)$ représente le taux avec lequel cet évènement arrive, pour $x \in]a,b[$. Afin de considérer des processus généraux, nous ajouterons une part de coagulation de Kingman, pour laquelle deux blocs coagulent à taux constant pour toute paire de blocs. Nous pouvons donc écrire les taux de la manière suivante.

Soit ν une mesure σ-finie sur $[0,1]$ donnant le taux auquel se produit la coagulation d'une portion x des individus présents, et $c \in \mathbb{R}^+$ le taux de coagulation bipartite. Supposons que nous partions d'une partition π contenant n blocs. Le taux de transition vers une partition π' résultant de la coagulation de k blocs de π est donné par :

$$\lambda_{n,k} = \mathbf{1}_{\{k=2\}} c + \int_{]0,1]} x^k (1-x)^{n-k} \nu(dx).$$

Remarquons que, souhaitant que tous ces taux soient finis, on imposera la condition d'intégrabilité suivante : $\int_{[0,1]} x^2 \nu(dx) < +\infty$. On peut alors réécrire ces taux de manière plus simple en définissant la mesure finie sur $[0;1]$ suivante :

$$\Lambda(dx) = c\delta_0(dx) + x^2 \nu(dx).$$

Dans ce cas, le taux s'écrira (avec la convention $0^0 = 1$) :

$$\lambda_{n,k} = \int_{[0,1]} x^{k-2} (1-x)^{n-k} \Lambda(dx).$$

C'est de cette mesure finie Λ que vient le nom Λ-coalescent donné à ce processus.

Ces taux de transition nous permettent sans difficulté de définir ce qu'est un processus Λ-coalescent sur $\mathcal{P}_n$.

Définition 3.3. Un Λ, n-coalescent est un processus de Markov Π^n à valeurs dans $\mathcal{P}_n$ possédant les taux de transition suivants : on passe d'une partition π contenant k blocs à une partition π' résultant de la coagulation de p blocs de π à taux $\lambda_{k,p}$.

On remarque que le premier saut (partant d'une partition de n blocs) arrive à taux $\lambda_n = \sum_{p=2}^{n} \binom{n}{p} \lambda_{n,p}$. Remarquons que la propriété de compatibilité est respectée par les processus Λ, n-coalescents.

Encore une fois, le processus du nombre de blocs D_t^n est un processus de mort, de taux de passage de k à $k-p+1$ étant égal à $\binom{k}{p} \lambda_{k,p}$.

Propriété 3.3. *La restriction de Π^n à $\mathcal{P}_{n-1}$ est un $\Lambda, n-1$-coalescent, et le processus du nombre de bloc $\#\Pi^n$ est un processus de mort de taux de passage de n à $n-k$ égal à $\binom{n}{k} \lambda_{n,k}$*

Preuve. Il suffit de réaliser le même genre de calculs que dans le cas du coalescent de Kingman. Considérons Π^n un Λ, n-coalescent partant de la partition π. Nous considérons encore les deux cas suivants.

Lorsque le bloc de π contenant n contient également un autre entier $i < n$, $\Pi^n_{|[n-1]}$ est un processus de Markov avec les mêmes transitions qu'un $n-1$-coalescent partant de $\pi_{|[n-1]}$, car on peut remonter à Π^n.

Si nous supposons $\{n\} \in \pi$, et que π possède k blocs. Soit τ le premier instant de saut (de loi exponentielle de paramètre λ_k), A l'évènement $\{\Pi^n_\tau \neq \pi\}$ sur lequel l'individu n n'est pas le seul impliqué (de probabilité $1 - \frac{(k-1)\lambda_{k,2}}{\lambda_k}$) et τ' le deuxième instant de saut (de loi conditionnelle exponentielle de paramètre $\lambda_{\#\Pi^n_\tau}$). En particulier, conditionnellement à A^c, τ' est une variable aléatoire de loi exponentielle λ_{k-1}.

Encore une fois, le premier temps de saut de $\Pi^n_{|[n-1]}$ est $\tilde{\tau} = \tau + \mathbf{1}_{\{A^c\}} \tau'$. Le même calcul que précédemment nous montre sans difficultés que le premier instant de saut pour le processus restreint est de loi exponentielle de paramètre λ_{k-1}. De plus $\Pi^n_{|[n-1]_{\tilde{\tau}}}$ est indépendant de $\tilde{\tau}$, et a bien la loi voulue.

On a dès lors $\Pi^n_{[n-1]}$ est un $\Lambda, n-1$-coalescent. $\square$

On peut alors définir un processus Λ-coalescent à valeurs dans $\mathcal{P}_\infty$ grâce au théorème d'extension de Kolmogorov encore une fois. Là encore on pourra faire en sorte que chacun des processus Π^n soient càdlàg, ce qui permettra que le processus défini par limite projective le soit également.

Définition 3.4. Un processus de Markov Π^Λ à valeurs dans $\mathcal{P}_\infty$ est un Λ-coalescent si chacune de ses projections sur $\mathcal{P}_n$ est un Λ, n-coalescent.

Comme précédemment avec le coalescent de Kingman, on va s'intéresser à l'existence d'un ancêtre commun pour cette famille infinie. Le résultat principal est dû à Schweinsberg [10], qui a donné une condition nécessaire et suffisante à la descente de l'infini pour de tels processus. Dans le cas où le Λ-coalescent descend de l'infini, nous avons aussi une borne sur l'âge de l'ancêtre commun le plus récent de toute population, quelle que soit sa taille.

Théorème 3.3 (Schweinsberg). *Soit Λ une mesure finie sur $[0,1]$ sans masse de Dirac en 1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit :*

$$\phi(n) = \sum_{k=2}^{n} (k-1) \binom{n}{k} \lambda_{n,k}.$$

Alors le processus Π^Λ descend de l'infini si et seulement si la série $\sum \frac{1}{\phi(n)}$ converge.

De plus l'espérance du temps d'atteinte de la partition $(\mathbb{N}, \emptyset, \cdots)$ est majorée par $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\phi(n)}$.

La preuve de ce théorème est donnée en annexe. Remarquons que nous avons encore l'alternative suivante : soit le processus descend de l'infini presque sûrement, soit il reste infini presque sûrement. Le résultat a ensuite été précisé dans [2], qui donne la vitesse de descente de l'infini du processus, c'est-à-dire qu'il existe une fonction déterministe $v(t)$ tel que $D_t \sim_0 v(t)$.

Remarque 3.2. On peut simplement s'intéresser aux processus Λ-coalescents pour Λ une mesure de probabilité sur $[0,1]$, quitte à changer le temps du processus coalescent. En d'autres termes on a :

$$(\Pi^\Lambda_{\alpha t})_{t \in \mathbb{R}^+} \overset{(d)}{=} (\Pi^{\alpha\Lambda}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}.$$

Nous pouvons construire un processus Λ-coalescent, si Λ n'a pas de mesure de Dirac en 0, en utilisant une mesure de Poisson M sur $\mathbb{R}^+ \times [0,1]$ d'intensité $dt \otimes \frac{1}{x^2}\Lambda(dx)$ de la manière suivante. On pose Π_t le processus définit de la manière suivante : on pose $\Pi_0 = \mathbf{0}_\infty$, et si $\delta_{t,r}$ est un atome de M, on réalise la coagulation d'une proportion r de blocs de Π_{t-}.

Pour cela on pose $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de Bernouilli i.i.d. de paramètre r, et on pose π' la partition simple aléatoire pour laquelle un entier i appartient au bloc non-trivial si et seulement si $B_i = 1$. Posons enfin $\Pi_t = \mathrm{Coag}(\Pi_{t-}, \pi')$, qui réalise bien la coagulation d'une proportion r des blocs de Π_{t-}. Le processus ainsi construit est bien un processus Λ-coalescent.

Dans tout ce que nous avons fait jusqu'ici, nous n'avons pas permis aux individus de se déplacer. Nous allons donc maintenant nous intéresser à ce cas, pour lequel les résultats que nous avons trouvés restent localement les mêmes, mais le comportement global est différent. En particulier, il n'existe pas de borne sur l'âge du dernier ancêtre commun indépendante de la taille de la famille considérée.

4 Processus coalescent spatial

Nous allons ajouter l'existence d'un processus de migration au sein de notre population. Pour cela nous associerons à chaque individu une marche aléatoire indépendante à temps continu de taux de transition ρ sur un graphe connexe G infini. Ce processus a été introduit pour la première fois pars Limic et Sturm [7].

4.1 Quelques notions sur les graphes

Soit $G = (S, V)$ un graphe infini, avec S un ensemble de sommets, et V un ensemble d'arêtes entre deux sommets. Pour $u, v \in S^2$, on note $u \sim v$ si u et v sont liés par une arête. On définit $d(u,v)$ la distance entre u et v par le nombre minimal d'arêtes qu'il faut parcourir pour aller de u à v.

Le degré de $u \in S$, d_u, est le nombre de voisins de u dans G. Un graphe G est dit de degré maximal fini D si tout sommet u a un degré inférieur ou égal à D.

On note $B(u,k)$ la boule de centre u et de rayon k. On note $\text{Vol } B(u,k)$ le nombre de sommets contenus dans cette boule. Si G est un graphe infini de degré maximal D, connexe, nous pouvons borner le volume de la manière suivante :

$$k \leq \text{ Vol } B(u,k) \leq D^k.$$

Une marche aléatoire à temps continu sur D de taux de transition ρ est définie de la manière suivante : au bout d'un temps aléatoire exponentiel de paramètre ρ, le processus saute d'une position u à une position $v \sim u$, choisi uniformément au hasard parmi les voisins de u. Nous avons donc les taux de transition suivants :

$$\begin{cases} p_{u,v} = \frac{\rho}{d_u} & \text{si } u \sim v \\ p_{u,v} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.2 Définition d'un processus coalescent spatial

On définit encore de la même manière ces processus coalescents pour un nombre fini d'individus, avant de passer à la limite projective en utilisant une propriété de compatibilité. Soit $n \in \mathbb{N}$, les processus que nous étudierons prendront leurs valeurs dans $\mathcal{P}_n \times G^n = \mathcal{P}_n^G$, où l'élément (π, l) représente une famille d'individus dans laquelle l'ancêtre des individus π_i est situé à la position l_i. Nous noterons :

$$\#_v(\pi, l) = \#\{i \in [n] | \pi_i \neq \emptyset \text{ et } l_i = v\}.$$

Définition 4.1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et Λ une mesure finie sur $[0,1]$. Un processus Λ, n-coalescent spatial est un processus de Markov à valeurs dans $\mathcal{P}_n^G$ noté $\left(\Pi_t^{\Lambda,n}, B_t\right)_{t \in \mathbb{R}^+}$ évoluant de la manière suivante :
- les blocs situés en un même sommet se comportent comme dans un Λ-coalescent non-spatial ;
- chaque bloc se déplace sur le graphe selon une marche aléatoire de taux de transition ρ indépendamment des évènements de coalescence.

On vérifie alors que la restriction d'un Λ, n-coalescent spatial est un $\Lambda, (n-1)$-coalescent spatial. Pour cela on sépare encore les cas entre $\{n\} \in \pi$ auquel cas on peut avoir à considérer d'autres sauts de Π^n, et $\{n\} \notin \Pi^n$ pour lequel le premier saut suffit, exactement comme dans le cas du Λ-coalescent non-spatial.

Ensuite par limite projective, on définit un Λ-coalescent comme suit :

Définition 4.2. Un Λ-coalescent spatial est un processus de Markov $\left(\Pi_t^{\Lambda}, B_t\right)_{t \in \mathbb{R}^+}$ à valeurs dans $\mathbb{P}_\infty \times G^{\mathbb{N}}$ tel que la restriction de Π^Λ à $[n]$ et la projection de B sur les n premières variables est un processus Λ, n-coalescent.

Il existe un tel processus, et on a unicité en loi de celui-ci pour une loi initiale donnée. Comme nous nous intéresserons maintenant uniquement à la descente de l'infini de ces processus, nous allons définir, comme dans le cas non-spatial, le processus de Markov de mort correspondant au nombre de blocs du processus coalescent.

Soit Λ une mesure finie sur $[0,1]$. On note $(X_t^n)_{t\in\mathbb{R}^+}$ le processus de Markov à valeurs dans l'ensemble des fonctions $G \to \mathbb{N}$ qui à un sommet v associe le nombre d'individus considérés dans la projection sur $[n]$ d'un Λ-coalescent spatial correspondant. On note $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ la limite croissante des X^n. On peut préciser les taux de transition de (X^n) :

– le taux de transition de x à $x + \delta_v - \delta_u$ est $x(u)\rho\, p(u,v)$;

– le taux de transition de x à $x - (k-1)\delta_u$ est $\binom{x(u)}{k}\lambda_{x(u),k}$;

où on a posé δ_u la fonction valant 1 en u et 0 ailleurs.

On notera N_t^n le nombre total d'individus présents dans le processus coalescent à l'instant t.

4.3 Descente de l'infini : vitesse et heuristique

Dans de nombreux cas que nous étudierons, il a été prouvé que le coalescent non-spatial se concentre autour d'une fonction déterministe $v(t)$ au voisinage de 0, quand la taille de la population devient grande. L'idée est alors de partir d'une grande population en un seul point u du graphe, et de considérer que pour des instants assez petits τ_n, le nombre d'individus ayant migré est négligeable devant le nombre d'individus qui restent en place.

Nous pourrons alors estimer le nombre d'individus sédentaires par $v(\tau_n)$, et le nombre d'individus ayant migré par $f(n) = \rho\int_0^{\tau_n} v(s)ds$, uniformément distribués sur les voisins. Nous prendrons enfin un temps suffisamment petit pour qu'aucun individu ne soit à plus d'une unité de distance de u, et que les individus ayant migré n'aient pas commencé à coalescer.

Cette approximation peut être appliquée à nouveau à la configuration que nous venons d'obtenir dans laquelle il reste de l'ordre de $f(n)$ individus en chaque sommet voisin de u ainsi qu'en u. On suppose qu'il n'y a que peu d'interactions entre les individus en u et les individus sur les sites voisins de u. Jusqu'à l'instant $\tau_{f(n)}$, cette hypothèse tient. Nous pouvons appliquer encore et encore la même approximation jusqu'à ce que $f \circ \cdots \circ f(n)$ soit de l'ordre de 1.

L'idée sera alors de nous arrêter légèrement plus tôt dans notre approximation afin d'obtenir que l'évolution décrite soit d'autant plus probable lorsque la taille de la population deviendra grande. Dans le processus, les individus se seront alors suffisamment étalés sur le graphe pour obtenir de bonnes estimations jusqu'au temps constant.

L'idée de la preuve du comportement aux temps longs du coalescent spatial est de partir de la situation étalée que nous venons de décrire. Dans ce cas les évènements de coalescence multiple deviennent rares, donc le processus se comporte d'avantage comme une marche aléatoire coalescente. En utilisant des résultats connus sur ces processus, il est possible de borner l'ordre de grandeur du nombre d'individus restants en un temps long.

Toutefois, avant de nous intéresser aux preuves des Théorèmes 2.1 à 2.3 , nous aurons besoin de plusieurs résultats techniques, que nous avons placés ici.

5 Résultats utiles sur les coalescents spatiaux

Commençons cette série de lemmes utiles par une estimation de grandes déviations sur les sommes de variables aléatoires exponentielles indépendantes, auxquelles nous aurons souvent affaire par la suite :

Lemme 5.1. *Soit I un ensemble d'indices, $(e_i)_{i\in I}$ une suite de variables aléatoires i.i.d de loi exponentielle de paramètre 1 et $(\mu_i)_{i\in I}$ une suite de paramètres positifs vérifiant $\sum_{i\in I}\mu_i < +\infty$. Posons $S = \sum_{i\in I}\mu_i e_i$, on a pour tout $0 < \varepsilon < 1$,*

$$\mathbb{P}(S < (1-\varepsilon)\mathbb{E}(S)) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2\mathbb{E}(S)^2}{4\mathbb{V}\mathrm{ar}(S)}\right) \tag{1}$$

et pour tout $0 < \varepsilon < \frac{2\mathbb{V}\mathrm{ar}(S)}{\mathbb{E}(S)\sup_{i\in I}\mu_i}$,

$$\mathbb{P}(S > (1+\varepsilon)\mathbb{E}(S)) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2\mathbb{E}(S)^2}{4\mathbb{V}\mathrm{ar}(S)}\right). \tag{2}$$

Preuve. Soit $0 < \lambda < \frac{1}{2}\inf_{i\in I}\frac{1}{\mu_i}$, on a en utilisant l'inégalité de Markov :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S > (1+\varepsilon)\mathbb{E}(S)) &\leq e^{-\lambda(1+\varepsilon)\mathbb{E}(S)}\prod_{i\in I}\mathbb{E}(e^{\lambda\mu_i e_i}) \\
&\leq e^{-\lambda(1+\varepsilon)\mathbb{E}(S)}\prod_{i\in I}\frac{1}{1-\lambda\mu_i} \\
&< e^{-\lambda(1+\varepsilon)\mathbb{E}(S)}\exp(\sum_{i\in I}\lambda\mu_i + \lambda^2\mu_i^2) \\
&\leq e^{-\lambda\varepsilon\mathbb{E}(S)+\lambda^2\mathbb{V}\mathrm{ar}(S)}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé que pour tout $x < \frac{1}{2}$, $-\log(1-x) < x + x^2$. Nous pouvons maintenant choisir $\lambda = \frac{\varepsilon\mathbb{E}(S)}{2\mathbb{V}\mathrm{ar}(S)}$, ce qui n'est possible que si $\varepsilon < \frac{2\mathbb{V}\mathrm{ar}(S)}{\mathbb{E}(S)\sup_{i\in I}\mu_i}$. Et dans ce cas nous obtenons le résultat escompté.

L'autre inégalité s'obtient de la même manière : on a pour tout $\lambda < 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S < (1-\varepsilon)\mathbb{E}(S)) &\leq e^{-\lambda(1-\varepsilon)\mathbb{E}(S)}\prod_{i\in I}\mathbb{E}(e^{\lambda\mu_i e_i}) \\
&\leq e^{-\lambda(1-\varepsilon)\mathbb{E}(S)}\prod_{i\in I}\frac{1}{1-\lambda\mu_i} \\
&< e^{-\lambda(1-\varepsilon)\mathbb{E}(S)}\exp(\sum_{i\in I}\lambda\mu_i + \lambda^2\mu_i^2) \\
&\leq e^{-\lambda\varepsilon\mathbb{E}(S)+\lambda^2\mathbb{V}\mathrm{ar}(S)}.
\end{aligned}$$

En posant $\lambda = -\frac{\varepsilon\mathbb{E}(S)}{2\mathbb{V}\mathrm{ar}(S)}$, nous obtenons la borne voulue. □

Afin d'étudier les coalescents spatiaux, nous aurons souvent besoin d'étudier le comportement de sous-ensembles de la population totale, pour cela il sera utile de nous intéresser aux liens entre le nombre d'individus dans le coalescent et le nombre d'individus dans chacune des sous-populations considérées.

Soit Π un processus coalescent partant de n individus à l'instant 0. Nous séparons ces n individus initiaux en sous-ensembles $B_1, \cdots, B_r$. On notera X^{B_k} le processus $\#\Pi^n_{|B_k}$ du nombre d'ancêtres commun à la sous-population B_k en chaque point dans le coalescent spatial et N^{B_k} le nombre total d'individus dans ce processus.

Lemme 5.2. *Pour tout t $\mathbb{R}^+$, nous avons :*

$$\forall v \in G, \forall k \leq r, X_t^{B_k}(v) \leq X_t(v) \leq \sum_{i=1}^{r} X_t^{B_i}(v)$$

et

$$\forall k \leq r, N_t^{B_k} \leq N_t \leq \sum_{i=1}^{r} N_t^{B_i}$$

Preuve. On compte dans X^{B_i} tous les individus dont au moins un descendant appartient à B_i. Dans ce cas la première inégalité est clairement vérifiée, on a bien $X_t^{B_k}(v) \leq X_t^n(v)$ et de plus chaque individu de Π étant compté au moins une fois dans la somme, $X_t(v) \leq \sum_{i=1}^{r} X_t^{B_i}(v)$.

Notons enfin que la seconde inégalité se déduit de la première en sommant sur tous les sommets v. □

Nous allons maintenant démontrer un résultat nous permettant de lier des coalescents spatiaux et non-spatiaux. Pour cela nous allons coupler un coalescent non-spatial avec son pendant spatial partant de n individus au même endroit.

X^n est le processus du nombre de blocs d'un Λ, n-coalescent spatial partant de n individus en un sommet u. On note Z_t^n le nombre d'individus dans le coalescent qui ont quitté le sommet u avant le temps t et M_t^n le nombre d'individus encore présents au temps t qui n'ont jamais quitté ce point. Enfin notons Y^n un Λ, n-coalescent non-spatial.

Lemme 5.3. *Il existe un couplage de X^n et Y^n qui vérifie pour tout t :*

$$M_t^n \leq Y_t^n \leq M_t^n + Z_t^n \tag{3}$$

et

$$Y_t^n - Z_t^n \leq X_t^n(u) \leq Y_t^n + Z_t^n. \tag{4}$$

Preuve. Nous pouvons tout d'abord remarquer que la loi de M^n est celle d'un Λ-coalescent non spatial pour lequel les individus meurent à taux ρ. De plus Z_t^n compte alors le nombre de morts de ce processus jusqu'à l'instant t. Nous pouvons alors réaliser un couplage de Y^n et (M^n, Z^n) de telle sorte que l'inégalité (3) soit réalisée. En effet, dans Y^n, les « morts » continuent à coalescer avec les autres individus, et dans $M^n + Z^n$, les « morts » sont toujours comptés dans le processus, mais gelés (ils ne prennent plus part aux évènements de coalescence). On obtient bien :

$$M_t^n \leq Y_t^n \leq M_t^n + Z_t^n.$$

Pour la deuxième partie, remarquons tout d'abord que M_t^n est clairement inférieur à $X_t^n(u)$, car dans X^n certains individus « morts » peuvent revenir en u, dès lors $Y_t^n - Z_t^n \leq X_t^n(u)$

grâce à l'inégalité précédente. De plus le nombre total d'individus présents dans le coalescent spatial ne peut excéder $M_t^n + Z_t^n$ puisque dans cette approximation, les individus qui ont à un moment quitté u sont considérés comme gelés. Donc en particulier, $X_t^n(u) \leq Y_t^n + Z_t^n$, nous avons l'inégalité (4). $\square$

Une étude plus fine de ce couplage est possible. Pour cela notons $\mathcal{G}$ la tribu engendrée par Y^n, $\mathcal{F}_t = \sigma(\Pi_s^n, s \leq t)$ la filtration canonique de Π^n et soit $\mathcal{F}_t^* = \sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{G})$ la filtration de X connaissant Y. Les processus suivants :

$$S_t^n = Z_t^n - \int_0^t \rho M_s^n ds \text{ et } V_t^n = S_t^{n2} - \int_0^t \rho M_s ds$$

sont clairement des martingales par rapport à $(\mathcal{F}_t)$, mais nous pouvons aussi prouver que ce sont des martingales par rapport à (F_t^*).

Lemme 5.4. *Pour tout $a < b$, nous avons la domination stochastique suivante :*

$$\mathbb{P}(Z_b^n - Z_a^n > x|\mathcal{G}) \leq \mathbb{P}\left(Poisson \left(\rho \int_a^b Y_s^n ds \right) > x \middle| \mathcal{G} \right).$$

Preuve. Connaissant $\mathcal{G}$, Z^n est un processus de saut pur arrivant à taux $\rho M_t^n \leq \rho Y_t^n$, d'où on tire le caractère de martingale et la domination précédente. $\square$

6 Divergence du coalescent de Kingman spatial

Nous allons maintenant tenter de borner le nombre total d'individus présents dans un coalescent de Kingman spatial. Soit Π^n un tel coalescent partant de n individus en un site $u \in G$, et X^n le processus du nombre de blocs de Π^n. Nous allons estimer le comportement de X au cours du temps par approximations successives.

6.1 Étude fine du coalescent de Kingman non-spatial

Puisque nous avons liés les coalescents spatiaux et non-spatiaux, nous commencerons par démontrer quelques résultats sur le coalescent de Kingman non-spatial, notamment sur les quantités Y^n et Z^n du couplage de X^n avec son pendant non-spatial du Lemme 5.3, qui nous permettront de déduire des bornes utiles pour X^n. Pour commencer, nous allons affiner l'approximation dont nous disposons sur la vitesse de descente de l'infini du coalescent de Kingman.

Lemme 6.1. *Soit t_n une suite de réels positifs décroissant vers 0 tel que $nt_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et Y^n un n-coalescent de Kingman non-spatial, on a pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ et n assez grand,*

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{t_n}{2} Y_{t_n}^n - 1 \right| > \varepsilon \right) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{t_n} \right). \tag{5}$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, nous allons calculer le temps S_n nécessaire pour passer de n individus à $m_n = \left\lceil \frac{2(1+\varepsilon)}{t_n} \right\rceil$. C'est une somme de temps exponentiels de paramètre $\binom{k}{2}$. On a en particulier :

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=m_n+1}^{n} \frac{2}{k(k-1)} = \frac{2}{m_n} - \frac{2}{n} \sim \frac{2}{m_n}.$$

et

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) = \sum_{k=m_n+1}^{n} \left(\frac{2}{k(k-1)} \right)^2 \sim \frac{2}{3m_n^3}.$$

Nous pouvons alors utiliser le Lemme 5.1 : pour tout $\eta < \frac{m_n(m_n+1)\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)}{\mathbb{E}(S_n)} \left(\sim \frac{2}{3}\right)$,

$$\mathbb{P}(S_n > \mathbb{E}(S_n)(1+\eta)) \leq \exp\left(-\frac{\eta^2 \mathbb{E}(S_n)^2}{4\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)} \right).$$

Nous obtenons alors, pour n assez grand et $\varepsilon < \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{t_n}{2} Y_{t_n}^n > 1 + \varepsilon \right) &= \mathbb{P}(S_n > t_n) \\
&= \mathbb{P}\left(S_n > \left(1 + \left(\frac{t_n}{\mathbb{E}(S_n)} - 1 \right) \right) \mathbb{E}(S_n) \right) \\
&\leq \exp\left(-\frac{\left(\frac{t_n}{\mathbb{E}(S_n)} - 1 \right)^2 \mathbb{E}(S_n)^2}{4\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)} \right) \\
&\leq \exp\left(-\frac{3\varepsilon^2}{2t_n}(1 + o(1)) \right).
\end{aligned}$$

L'autre sens de l'inégalité s'obtient de la même manière en estimant la probabilité que

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=\left\lfloor \frac{2(1-\varepsilon)}{t_n} \right\rfloor}^{n} \frac{2}{k(k-1)} e_i$$

soit inférieure à t. On conclut une fois encore en utilisant l'inégalité (1) du Lemme 5.1. □

Nous aurons également besoin d'une estimation du nombre total d'« émigrants » qui quittent u au cours du temps, autrement dit de la quantité Z_∞^n dans notre précédente écriture. Pour ce qui est de l'heuristique, il est assez simple de voir que cette quantité est de l'ordre de $2\rho \log n$. En effet, entre t et $t + dt$, Z_t^n croit d'environ $\rho X_t(u)dt$ individus.

Étant donné qu'il y a au début bien plus d'individus dans notre coalescent spatial, nous obtenons $Z_\infty^n \sim \int_0^M \rho X_s(u)ds$, où M est une constante arbitraire. Or on sait qu'il y a au voisinage de $t = 0$ de l'ordre de $\dfrac{2}{t} \wedge n$ individus à l'origine, ce qui nous donne notre approximation. Plus précisément, nous allons démontrer le résultat de grandes déviations suivant.

Lemme 6.2. *Soit $\varepsilon > 0$, il existe $c, C > 0$ tel que :*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{Z_\infty^n}{\log n} - 2\rho\right| > \varepsilon\right) < Cn^{-c}. \tag{6}$$

Et de plus pour tout $M > 0$,

$$\mathbb{P}(Z_\infty^n > M) < Cn^C e^{-M}. \tag{7}$$

Preuve. Soit Π^n un n-coalescent de Kingman spatial, on considère la suite $(T_k)_{0\le k\le n-1}$ des temps auxquels il arrive quelque chose aux individus n'ayant jamais quitté u. C'est une suite de temps d'arrêt. De plus, l'évènement est soit un évènement de coagulation, soit un évènement de migration, donc à chaque instant T_k, le nombre d'individus n'ayant jamais quitté u diminue de 1, car soit deux lignées ont fusionné, soit un individu a quitté u. A l'instant T_k, il reste donc $n-k$ individus qui n'ont jamais quitté le sommet u.

Le $k+1^{\text{ième}}$ temps d'arrêt T_k suit donc une loi exponentielle de paramètre

$$\frac{(n-k)(n-k-1)}{2} + \rho(n-k) = \frac{(n-k)(n-k-1+2\rho)}{2}.$$

De plus l'évènement correspond à une mutation avec probabilité $\frac{2\rho}{n-k-1+2\rho}$ et à une fusion avec probabilité $\frac{n-k-1}{n-k-1+2\rho}$. Posons alors ξ_k une variable aléatoire de Bernouilli de paramètre $\frac{2\rho}{k-1+2\rho}$, nous avons alors :

$$Z_\infty^n \overset{(d)}{=} \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

Le reste est une simple affaire de grandes déviations : pour tout $\lambda > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{-\lambda Z_\infty^n}) &= \prod\left(1 - \frac{2\rho}{i+2\rho}(1-e^{-\lambda})\right) \\
&\le \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{2\rho}{i+2\rho}(1-e^{-\lambda})\right) \\
&< \exp\Big(-2\rho(1-e^{-\lambda})(C+\log n)\Big).
\end{aligned}$$

Donc en utilisant l'inégalité de Markov, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_\infty^n < 2(1-\varepsilon)\rho\log n) &\le \exp(2\lambda((1-\varepsilon)\rho\log n)\mathbb{E}(e^{-\lambda Z_\infty^n}) \\
&< \exp\Big(2\lambda((1-\varepsilon)\rho\log n - 2\rho(1-e^{-\lambda})(C+\log n)\Big) \\
&\le \exp\left(\left(-2\lambda\rho\varepsilon + O(\lambda^2)\right)\log n + C\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent pour λ assez petit, le coefficient devant $\log n$ est négatif, donc on peut majorer cette probabilité par une puissance négative de n, on obtient le premier sens de l'inégalité 6.

Nous appliquons maintenant l'inégalité de Markov à $e^{\lambda Z_\infty^n}$. Nous avons de la même manière :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}(Z_\infty^n > M) & \leq & \exp(-\lambda M)\mathbb{E}(e^{\lambda Z_\infty^n}) \\ & < & \exp\Big(-\lambda M - 2\rho(e^\lambda - 1)(C + \log n)\Big).\end{array}$$

Dès lors, pour $M = 2\rho(1+\varepsilon)\log n$ et λ assez petit, nous avons l'autre sens de l'inégalité 6, et pour $\lambda = 1$, nous avons également l'inégalité 7. □

6.2 Estimations du comportement du coalescent de Kingman spatial

Rappelons que nous avons démontré précédemment que pour des temps suffisamment petits, $X_t(u)$ se comporte comme $\frac{2}{t}$, et que le nombre d'individus quittant u est de l'ordre de $2\rho\log n$. Nous allons montrer que cette approximation tient jusqu'à un temps τ_n, pour lequel avec grande probabilité, il restera $\frac{2}{\tau_n}$ individus en u, et $2\rho\log n$ individus auront migré, et se seront uniformément distribués sur les voisins de u.

Commençons par un premier lemme sur le comportement du coalescent de Kingman spatial immédiatement après son départ de l'origine.

Lemme 6.3. *Soit $a_0, a_1, \varepsilon > 0$, on pose $\tau_n = a(\log n)^{-3}$ pour $a \in [a_0, a_1]$ et on définit l'évènement*

$$A = \{\forall v \in G, X_{\tau_n}^n(v) \in [(1-\varepsilon)Q(v), (1+\varepsilon)Q(v)]\}$$

où

$$Q(v) = \begin{cases} \frac{2}{\tau_n} & v = u \\ \frac{2\rho}{d_u}\log n & v \sim u \\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$$

Alors il existe C dépendant uniquement de ε, a_0, a_1 et d_u tel que $\mathbb{P}(A^c) \leq \frac{C}{\log n}$.

Preuve. Nous posons Z_t^n le nombre d'individus distincts ayant quitté u sur l'intervalle $[0, t]$ (chaque individu n'est compté qu'au plus une fois), et Y_t^n le nombre total d'individus dans le couplage de notre processus avec le coalescent non-spatial défini dans le Lemme 5.3. Nous avons :

$$Y_t^n - Z_t^n \leq X_t^n(u) \leq Y_t^n + Z_t^n \text{ p.s.}$$

Nous avons maintenant besoin d'estimer $Y_{\tau_n}^n$ et $Z_{\tau_n}^n$. Or le comportement de $Y_{\tau_n}^n$ est connu, grâce au Lemme 6.1, nous savons que :

$$\mathbb{P}(|\frac{\tau_n}{2}Y_\tau^n - 1| > \varepsilon) \leq Ce^{-\frac{c}{\tau_n}} \leq \frac{C}{n}.$$

De plus, grâce à l'inégalité (6) du Lemme 6.2, nous avons :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{Z_\infty^n}{\log n} - 2\rho\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq Cn^{-c}.$$

Il nous reste à borner $Z^n_\infty - Z^n_{\tau_n}$, le nombre d'individus quittant le sommet u après l'instant τ_n. Rappelons que M^n_t est le nombre d'individus qui sont restés en u tout au long de l'intervalle $[0,t]$. Nous pouvons alors utiliser les équations (5) et (7) et le Lemme 5.3 pour obtenir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z^n_\infty - Z^n_{\tau_n} > \frac{\varepsilon}{2}\log n) &\leq \mathbb{P}\left(Y^n_{\tau_n} > \frac{3}{\tau_n}\right) + \mathbb{P}\left(Z^n_\infty - Z^n_{\tau_n} > \frac{\varepsilon}{2}\log n \text{ et } Y^n_{\tau_n} < \frac{3}{\tau_n}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(Y^n_{\tau_n} > \frac{3}{\tau_n}\right) + \mathbb{P}\left(Z^n_\infty - Z^n_{\tau_n} > \frac{\varepsilon}{2}\log n \middle| M^n_{\tau_n} < \frac{3}{\tau_n}\right) \\
&\leq \frac{C}{n} + C\left(\frac{3}{\tau_n}\right)^C e^{-\frac{\varepsilon}{2}\log n} \\
&\leq \frac{C}{n} + \frac{C(\log n)^C}{n^{\frac{\varepsilon}{2}}} \\
&\leq \frac{C}{\log n}.
\end{aligned}$$

Dès lors nous avons également, avec probabilité au moins $1 - \frac{C}{\log n}$, $\left|Z^n_{\tau_n} - 2\rho\log n\right| < \varepsilon\log n$ et $\left|Y^n_{\tau_n} - \frac{2}{\tau_n}\right| < \frac{2}{\tau_n}\varepsilon$. En particulier, le nombre d'émigrants est négligeable devant le nombre d'individus restants sur place. Grâce à l'inégalité vérifiée par $X^n_t(u)$, nous obtenons la bonne borne pour cette quantité, pour n assez grand, donc pour tout n quitte à changer la constante C.

De plus, conditionnellement à $Z^n_{\tau_n}$, la probabilité qu'il y ait plus d'un seul saut avant le temps τ_n est au plus de l'ordre de $2\rho\tau_n Z_{\tau_n}$, soit avec grande probabilité au plus de l'ordre de $C(\log n)^{-2}$. Avec probabilité $1 - \frac{C}{\log n}$, chaque individu fait donc au plus un saut. De même la probabilité qu'un évènement de coagulation impliquant certains des individus ayant migré avant l'instant τ_n arrive avant ce même instant est également dominé par $C(\log n)^{-1}$, donc aucun n'arrive avant le temps τ_n avec grande probabilité.

Enfin, $Z^n_{\tau_n}$ est concentré au voisinage de $2\rho\log n$, et conditionnellement au nombre total d'émigrants, les destinations des individus sont indépendantes et identiquement distribuées selon la loi $p(u,.)$. Par conséquent, comme $p(u,v) = \frac{1}{d_u}$ pour $v \sim u$, nous avons, grâce au théorème central limite, que la probabilité avec laquelle il existe un décalage d'au moins $\varepsilon\log n$ par rapport aux valeurs moyennes est dominée par $\frac{C}{n^c}$.

Par conséquent, nous pouvons majorer la probabilité de A^c par $\frac{C}{\log n}$. $\square$

Passons maintenant à la seconde partie de notre raisonnement. Grâce à ce lemme, nous pouvons contrôler avec grande probabilité le comportement du coalescent spatial, ce qui nous permet de l'amener en un temps τ_n d'une population concentrée en un point avec n individus, à une population concentrée sur ce point et ses voisins immédiats avec de l'ordre de $(\log n)$ individus en chaque point, et $(\log n)^3$ en u. L'idée est alors de ré-appliquer ce lemme entre les instants τ_n et $\tau_n + \tau_{\log n}$, et continuer les itérations jusqu'à ce que cette approximation ne soit plus valide. C'est ce que nous allons faire maintenant.

Rappelons que $\log^{(k)} n = \underbrace{\log\circ\cdots\circ\log}_{\text{k termes}} n$. Dans ce cas, soit $n \in \mathbb{N}$, pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $t_0 = 0$ et $t_{k+1} = t_k + (\log^{(k+1)} n)^{-3}$. Posons ensuite $m_n = \log^* n$ le pas jusqu'auquel nous aimerions poursuivre notre approximation pour obtenir le théorème. Pour des raisons de calcul, nous ne les pousserons que jusqu'à l'étape m'_n, où on a posé :

$$m'_n = \min\left\{k \in \mathbb{N} : \log^{(k)} n < \text{Vol } B(u, m_n)^2\right\}.$$

Observons tout d'abord que pour n assez grand, Vol $B(u, m_n)^2 > 10$, donc à partir de ce rang, $m'_n \leq m_n$. De plus si D est le degré maximal du graphe, alors en majorant le volume de la boule par D^{m_n}, on obtient :

$$\begin{aligned} m'_n &> \min\left\{k \in \mathbb{N} : \log^{(k+1)} n < D^{2m_n}\right\} \\ &\geq \min\left\{k \in \mathbb{N} : \log^{(k+2)} n < 2(\log D) m_n\right\} \\ &\geq \min\left\{k \in \mathbb{N} : \log^{(k+\log^*(Cm_n))} n < 1\right\} \\ &\geq m_n - \log^*(Cm_n + 1). \end{aligned}$$

Soit $m_n - m'n < \log^*(C(\log^* n)) = o(\log^* n)$, donc m_n et m'_n sont équivalents.

Dernier fait, nous pouvons minorer $\log^{(m'_n)} n$ grâce à la définition de m'_n, en utilisant le fait que, dans un graphe connexe, $k \leq \text{Vol } B(u, k)$:

$$m_n^2 \leq \log^{m'_n} n,$$

donc en particulier cette quantité tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. Nous pouvons donc appliquer le Lemme 6.3 m'_n fois à la suite et espérer garder une bonne approximation, puisqu'à l'instant $t_{m'_n}$, il y a toujours un très grand nombre d'individus en chaque point considéré.

Lemme 6.4. *Soit B_k l'évènement défini par :*

$$B_k = \{\forall v \in G, X^n_{t_k}(v) \in [(\frac{1}{D} - \varepsilon)Q_k(v), (D + \varepsilon)Q_k(v)]\},$$

où D est le degré maximal de G, et Q_k est défini par :

$$Q_k(v) = \begin{cases} (\log^{(k)} n)^3 & d(u,v) < k \\ 2\rho \log^{(k)} n & d(u,v) = k \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

On a alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{m'_n} B_k\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Preuve. Nous allons utiliser l'inégalité suivante, valable en toute généralité :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{m'_n} B_k\right) \leq \mathbb{P}(B_1^c) + \sum_{k=2}^{m'_n} \mathbb{P}(B_k^c \cap B_{k-1}) \leq \mathbb{P}(B_1^c) + \sum_{k=2}^{m'_n} \mathbb{P}(B_k^c | B_{k-1}).$$

Le Lemme 6.3 nous donne déjà une borne sur $\mathbb{P}(B_1^c)$, l'idée est ici de majorer $\mathbb{P}(B_{k+1}^c|B_k)$ en utilisant successivement le Lemme 5.2 pour nous ramener d'un système dans lequel les individus sont dispersés sur une boule de rayon k à Vol $B(u,k)$ systèmes, chacun partant d'un certain nombre d'individus en un point, sur lequel on a des bornes grâce à B_k, puis le Lemme 6.3 pour caractériser l'évolution de chacun de ces sommets.

Supposons que B_k soit vérifié, dans ce cas, à l'instant t_k nous avons à chaque site de $B(u,k)$ un nombre d'individus compris entre $\frac{\log^{(k)} n}{2D}$ et $2D(\log^{(k)} n)^3$ (en choisissant $\varepsilon > 0$ assez petit pour que ces bornes soient vérifiées).

Nous séparons alors les individus en sous-groupes selon leur localisation géographique à l'instant t_k, et considérons l'évolution entre les instants t_k et t_{k+1} de chacun de ces sous-ensembles indépendamment des autres. Le Lemme 6.3 peut être appliqué, car pour chacun de ces sommets, le temps $\tau = (\log^{k+1} n)^{-3}$ est bien compris entre $a_0(\log q)^{-3}$, et $a_1(\log q)^{-3}$ (où q le nombre d'individus est compris entre $\frac{\log^{(k)} n}{2D}$ et $2D(\log^{(k)} n)^3$). En choisissant n assez grand, il existe a_0 et a_1 tel que cette estimation tienne uniformément pour tout $k \leq m'_n$ (car $\log m'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$).

Dans ces conditions, nous appliquons donc le Lemme 6.3, et pour chacune des évolutions que nous étudions, le nombre d'individus qui restent en place est d'environ $(1 \pm \varepsilon)(\log^{(k+1)} n)^3$, et environ $\frac{1\pm\varepsilon}{d_v} \log q$ individus se déplacent vers les sites voisins, avec probabilité $1 - C(\log q)^{-1}$, où q est le nombre d'individus présents en v. Dès lors, étant donnée la borne sur q induite par B_k, la probabilité que, sachant que B_k est réalisé, que cet évènement ne se réalise pas pour un sommet v fixé est dominée par $\frac{C}{\log^{(k+1)} n - \log 2D} \leq \frac{C'}{\log^{(k+1)} n}$.

Remarquons alors que si B_k est vérifié, et que ces égalités sont vérifiées pour tout $v \in B(u,k)$, alors grâce au Lemme 5.2, B_{k+1} est aussi réalisé (dès lors que n est choisi suffisamment grand, indépendamment de k). Dès lors la probabilité que sachant B_k, B_{k+1} ne soit pas réalisé est majorée par :

$$\frac{C \text{ Vol } B(u,k)}{\log^{(k+1)} n} \leq \frac{C \text{ Vol } B(u,m_n)}{\log^{(k+1)} n}.$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité citée plus haut, la probabilité qu'il existe un k tel que B_k ne soit pas vérifié est dominée par :

$$C \text{ Vol } B(u,m_n) \sum_{k=1}^{m'_n} \frac{1}{\log^{(k+1)} n} \leq \frac{C}{\log^{(m'_n+1)} n} \sum_{k=0}^{m'_n} \frac{1}{2^k} \leq \frac{2C}{\log^{(m'_n+1)} n}.$$

Grâce à notre choix de m'_n, cette quantité est au plus $\frac{2C}{\text{Vol } B(u,m_n)}$, qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui conclut notre preuve. □

6.3 Extension de l'estimation à temps fini

On a obtenu une bonne description du comportement du coalescent de Kingman spatial jusqu'au temps $t_{m'_n}$, qui est $o(1)$. Nous allons étendre cette estimation jusqu'à un temps fini. La minoration s'obtient sans trop de difficultés, mais pour la majoration, nous aurons besoin des outils suivants. Montrons tout d'abord que les individus, après l'instant $t_{m'_n}$ ne s'éloignent plus beaucoup du point u.

Lemme 6.5. *Soit $\varepsilon, t > 0$, avec grande probabilité il n'y a pas d'individus en dehors de la boule $B(u, (1+\varepsilon)m_n)$ à ou avant l'instant t.*

Preuve. Le Lemme 6.4 nous indique qu'avec grande probabilité, à l'instant $t_{m'_n}$, il y a au plus $3 \operatorname{Vol} B(u, m'_n)(\log^{(m'_n)} n)^3$ individus tous situés dans la boule de centre u et de rayon m'_n. Rappelons que $\log^{(m'_n)} n \leq D^{2m_n}$, et $m'_n \leq m_n$ donc le nombre total d'individus est dominé par CD^{7m_n}.

Nous allons majorer le nombre d'individus présents à l'instant t en ignorant simplement les évènements de coagulation. Chaque individu fait alors avant l'instant t un nombre de sauts suivant une loi de Poisson de paramètre $\rho(t - t_{m'_n})$. La probabilité qu'il existe un individu qui fasse plus de εm_n sauts avant l'instant t est alors dominée par $CD^{7m_n} \frac{(\rho t)^{-\varepsilon m_n}}{\lceil \varepsilon m_n \rceil !}$.

Cette dernière quantité tend vers 0, nous obtenons bien le résultat escompté. □

Nous allons maintenant étudier comment se comportent les individus conditionnés à rester dans un espace clos (ici la boule de centre u et de rayon $(1+\varepsilon)m_n$, dans ce cas, les épisodes de coagulation sont assez fréquents pour obtenir une décroissance similaire à celle du coalescent de Kingman non-spatial.

Lemme 6.6. *Soit $t < 2$, et un ensemble S de sommets, supposons qu'à l'instant 0 tous les individus sont dans S. On note Z_t le nombre d'individus qui sont sortis de S au moins une fois entre les instants 0 et t, et N_t^S le nombre d'individus dans S à l'instant t. Dès lors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c > 0$ tel que :*

$$\mathbb{P}\left(N_t^S > Z_t + \frac{4+\varepsilon}{t}|S|\right) \leq e^{-\frac{c|S|}{t}}.$$

Preuve. On pose Q_t le nombre d'individus restés dans S entre les instants 0 et t, on a clairement $N_t^S \leq Z_t + Q_t$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}\left(N_t^S > Z_t + \frac{4+\varepsilon}{t}|S|\right) \leq \mathbb{P}\left(Q_t > \frac{4+\varepsilon}{t}|S|\right).$$

Il nous suffit donc de majorer Q_t pour conclure. Pour cela remarquons que le taux de coagulation total à l'instant s pour les individus dénombrés dans Q_t est :

$$\sum_{v \in S} \binom{\tilde{X}_s(v)}{2} \geq |S| \binom{\frac{Q_s}{|S|}}{2},$$

en utilisant la convexité de $x \mapsto \binom{x}{2}$ et en posant $\tilde{X}_s(v)$ le nombre d'individus présents en v n'ayant jamais quitté l'ensemble S.

Sur l'ensemble $Q_t < 2|S|$, comme $t < 2$, il n'y a rien à démontrer. Sur l'ensemble $Q_s > 2|S|$ pour tout $s < t$, nous remarquons que le taux de coagulation est plus grand que $\frac{1}{2|S|}\binom{Q_s}{2}$, donc Q_t est dominé par un coalescent de Kingman non spatial ralenti par un facteur $2|S|$. Le Lemme 6.1 nous permet de conclure, car Q_t est concentré au voisinage de $\frac{4|S|}{t}$ pour n assez grand. □

Tous ces résultats nous permettent finalement de démontrer le Théorème 2.1

Preuve du Théorème 2.1. La borne supérieure s'obtient simplement grâce aux deux lemmes précédents. On voit grâce au Lemme 6.6 qu'aucun individu ne quitte $B(u,(1+\varepsilon)m_n)$ et grâce au Lemme 6.5 que le nombre d'individus dans cette boule est dominé par une constante multipliée par le volume de cette boule.

Pour la borne inférieure, notons qu'à l'instant $t_{m'_n}$ il y a au moins un individu en chaque point de la boule $B(u,m'_n)$, choisissons-en une pour chaque sommet. La probabilité qu'un de ces individus ne bouge avant l'instant t est indépendante du mouvement des autres individus et majorée par $e^{-\rho t}$. Par conséquent, le nombre total d'individus présents à l'instant t étant supérieur au nombre d'individus que nous avons choisis et qui n'ont pas bougés. Ce nombre est minoré avec une grande probabilité par une constante multipliée par le volume de la boule. Enfin, nous avons, pour n assez grand, $m_n - m'_n \leq \varepsilon m_n$.

Nous en tirons qu'avec grande probabilité, le nombre d'individus présents à l'instant t est compris entre $\text{Vol } B(u,(1-\varepsilon)m_n)$ et $\text{Vol } B(u,(1+\varepsilon)m_n)$. □

Notons le fait intéressant suivant, utile pour la preuve du Théorème 2.4 : un coalescent de Kingman spatial partant de n individus en u domine de manière stochastique à l'instant t une collection de variables aléatoires de Bernouilli i.i.d. distribuées sur $B(u,m_n)$.

Remarque 6.1. Si on fait quelques hypothèses sur la forme du graphe, par exemple dans le cas où ce graphe est $\mathbb{Z}^d$, nous pouvons préciser notre propos. En effet dans ce cas, le volume d'une boule de centre u et de rayon k est de l'ordre de $c_0 k^d$. Dans ce cas nous pouvons donner un ordre de grandeur du nombre d'individus présents à l'instant t, entre $c\log^* n^d$ et $C\log^* n^d$.

7 Divergence générale d'un processus Λ-coalescent

Nous nous intéressons maintenant à un Λ-coalescent spatial, où Λ est une mesure finie sur $[0,1)$. Nous allons nous appliquer à montrer la divergence de ce processus vers $+\infty$. Pour cela, intéressons-nous tout d'abord à la taille de l'arbre généalogique d'un tel processus coalescent, stoppé au dernier ancêtre commun.

7.1 Longueur totale de l'arbre généalogique du Λ-coalescent non-spatial

Pour cela, soit Λ une mesure finie sur $[0,1]$, on pose (Y_t) le processus du nombre de blocs d'un Λ-coalescent non-spatial, et (Y_t^n) le processus du nombre de blocs de sa restriction à n. Nous allons tout d'abord nous intéresser à :

$$K_t^n = \int_0^t (Y_s^n - 1)ds,$$

qui est une quantité qui approxime bien la taille de l'arbre généalogique de la population. Nous nous intéressons à cette quantité, car si pour t petit, Y^n est une bonne estimation du nombre de blocs présents à l'origine du graphe, alors ρK^n est une bonne estimation du nombre d'émigrants dans le processus.

Lemme 7.1. *Pour tout $t>0$ fixé, $K^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ p.s.*

Preuve. Soit Π le Λ-coalescent spatial, on note $\sim^t$ la relation d'équivalence induite par la partition Π_t sur $\mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\tau_n = \inf\{t > 0 | \exists j < n : n \sim^t j\}$$

l'instant auquel l'individu n fusionne pour la première fois dans le Λ, n-coalescent.

On a alors $Y_s^n = Y_s^{n-1} + \mathbf{1}_{\{s<\tau_n\}}$, donc par conséquent :

$$K^n = K^{n-1} + \tau_n \wedge t.$$

On pose alors $\mathcal{F}_n = \sigma(Y^k, k \leq n)$, dans ce cas, conditionnellement à $\mathcal{F}_{n-1}$, le taux de coagulation de l'individu n avec un individu d'indice plus petit est à l'instant s égal à :

$$\int_{[0,1]} \frac{1}{x^2} x(1-(1-x)^{Y_s^{n-1}}) d\Lambda(x).$$

On utilise alors que $(1-x)^p \geq 1 - px$, on obtient que le taux de coagulation est au plus égal à Y_s^{n-1}. Dans ce cas nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(t \wedge \tau_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= \int_0^t \mathbb{P}(\tau_n > s | \mathcal{F}_{n-1}) ds \\
&\geq \int_0^t \exp\left(-\int_0^s Y_u^{n-1} du\right) ds \\
&\geq \int_0^t \exp\left(-s - \int_0^t Y_u^{n-1} - 1 du\right) ds \\
&= e^{-K^{n-1}} \int_0^t e^{-s} ds = e^{-K_t^{n-1}}(1-e^{-t}).
\end{aligned}$$

Notons maintenant que K^n est croissant en n (la limite existe donc presque sûrement), il suffit donc de montrer que pour tout $A > 0$, le temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_n)$:

$$T^A = \inf\{n \geq 1 | K^n > A\}$$

est fini presque sûrement. Soit M_n la martingale définie par :

$$M_n = K^n - \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}(\tau_k \wedge t | \mathcal{F}_{k-1}).$$

Par théorème d'arrêt appliqué à M_n, on a :

$$\mathbb{E}(M_{n \wedge T^A}) = 0.$$

De plus sur l'ensemble $K^n < A$, $\mathbb{E}(t \wedge \tau_n | \mathcal{F}_{n-1})$ est minorée par $e^{-A}(1-e^{-t})$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(K^{n \wedge T^A}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n \wedge T^A} \mathbb{E}(t \wedge \tau_k | \mathcal{F}_{k-1})\right) \\
&\geq c\mathbb{E}(n \wedge T^A) - 1.
\end{aligned}$$

On en tire $c\mathbb{E}(n \wedge T^A) \leq 1 + \mathbb{E}(K^{n \wedge T^A}) \leq 1 + A + t$, car $A \leq K^{n \wedge T^A} \leq A + t$. Par conséquent nous obtenons en passant à la limite $\mathbb{E}(T^A) < +\infty$, d'où $T^A < +\infty$ p.s.

On conclut que $K^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ p.s. $\square$

7.2 Divergence du coalescent spatial

Rappelons les notations employées dans le Lemme 5.3, (X^n, Y^n) les processus couplés des nombres de blocs dans le Λ, n-coalescent spatial et non-spatial. Z^n est le processus du nombre d'immigrants hors du sommet u, et M_t le processus du nombre d'individus restés en u tout au long de $[0, t]$.

Lemme 7.2. *Nous avons $Z_t^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ p.s.*

Preuve. Comme Z_t^n est croissant en n, pour montrer $Z_t^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ p.s. il nous suffit de montrer que $\forall A > 0$, $\mathbb{P}(Z_t^n \leq A) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Rappelons pour commencer que $S_t^n = Z_t^n - \int_0^t \rho M_s^n ds$ est une $\mathcal{F}^*$-martingale. Sur l'évènement $\{Z_t^n \leq A\}$, nous avons pour tout $s \leq t$:

$$M_s^n \geq Y_s^n - Z_s^n \geq Y_s^n - A.$$

Par conséquent, $S_t^n \leq A + \rho A t - \int_0^t \rho Y_s^n ds$. Grâce au Lemme 7.1, pour n assez grand, sur l'évènement $\{Z_t^n \leq A\}$, nous avons :

$$S_t^n \leq -\frac{1}{2}\int_0^t \rho Y_s^n ds.$$

On a alors en utilisant l'inégalité maximale de Doob, sur les variables aléatoires conditionnées par l'évolution de Y^n pour obtenir :

$$\mathbb{P}(Z_t^n \leq A|\mathcal{G}) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{s\leq t}|S_s^n| \geq \frac{1}{2}\int_0^t \rho Y_s^n ds \,\middle|\, \mathcal{G}\right) \leq \frac{16}{\int_0^t \rho Y_s^n ds}.$$

On utilise encore le fait que $\int_0^t Y_s^n ds \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ p.s. pour conclure, on a bien $\mathbb{P}(Z_t^n \leq A) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. $\square$

Nous allons maintenant nous intéresser à un évènement local : la probabilité qu'en un point v, au moins m individus soient réunis avant l'instant t. Notons un tel évènement :

$$E_{m,t,v}^n = \{\sup_{[0,t]} X_s^n(v) \geq m\}.$$

Lemme 7.3. *Pour tout $v \in G$, pour tout $t > 0$ et tout $m \in N$, on a :*

$$\mathbb{P}(E_{m,t,v}^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Preuve. Soit $v \in G$, $t > 0$, $m \in \mathbb{N}$. Remarquons pour commencer que si $v = u$, le résultat est évident. Nous allons démontrer ensuite le résultat pour v voisin de u. Soit $\varepsilon > 0$, on pose :

$$\tau = \varepsilon \min\{(\rho m)^{-1}, \lambda_m^{-1}, t\}.$$

On sait que $Z_\tau^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc de même, par loi des grands nombres, il existe N assez grand tel qu'avec probabilité au moins $1-\varepsilon$, v reçoive au moins m individus de u si on commence avec au moins N individus.

Concentrons-nous sur ces m individus, ils quitteront v à taux ρ, et un évènement de coalescence interviendra entre plusieurs d'entre eux à taux λ_m. Par définition du temps τ, aucuns de ces individus ne coalesceront entre eux ou ne quitteront v avec probabilité au moins $1-2\varepsilon$.

Dès lors, pour tout $n \geq N$, on a $\mathbb{P}(X_\tau^n(v) \geq m) \geq 1-3\varepsilon$. ε étant choisi arbitrairement petit, on obtient bien :

$$\mathbb{P}(E_{m,t,v}^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Pour v situé à distance k de u, on choisit w voisin de v tel que $d(u,w) = k-1$. On suppose par récurrence que pour tout $m' \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(E_{m',\frac{t}{2},w}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Dans ce cas, on utilise la propriété de Markov forte, et on raisonne comme précédemment en faisant partir un nombre m' assez grand d'individus de w. □

Ce dernier lemme nous permet de démontrer la non-descente de l'infini de tout Λ-coalescent spatial. En effet on sait contrôler la probabilité qu'au moins m individus passent en un point donné pour tout point. L'idée sera maintenant de contrôler la probabilité qu'au moins m individus soient simultanément présents à l'instant t, en des endroits suffisamment éloignés les uns des autres pour qu'avec une très grande probabilité, ces derniers n'interagissent pas.

Théorème 7.1. $N_t^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *p.s.*

Preuve. En utilisant encore une fois la monotonie en n et t de N_t^n, il nous suffit de montrer que pour tout $t > 0$ et $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N_t^n \geq m) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Soit $\varepsilon, \eta > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ fixé. On pose S un sous-ensemble de m sommets de G tel que la distance entre deux sommets soit d'au moins $\frac{1}{\eta}$. Grâce au Lemme 7.3 nous savons que :

$$\forall v \in S, \mathbb{P}(E_{1,\varepsilon,v}^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Notons maintenant $A_{v,\varepsilon}$ la probabilité que le premier (s'il y en a un) des individus qui rentrent au point v avant l'instant ε reste en v jusqu'à l'instant ε. Cette probabilité est au moins égale à $e^{-\rho\varepsilon}$ si un tel individu existe.

Par conséquent, en choisissant ε assez petit et n assez grand, nous voyons qu'avec probabilité au moins $1-\eta$, à l'instant ε chacun des m sommets de S possède au moins un individu. De plus conditionnellement à cet évènement de forte probabilité, la probabilité que deux de ces mêmes individus, situés à l'instant ε à une distance d'au moins $\frac{1}{\eta}$ les uns des autres fusionnent avant l'instant t tend vers 0 quand $\eta \to 0$.

On en tire bien $\mathbb{P}(N_t^n \geq m) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. □

Remarque 7.1. Notons pour conclure que même si nous sommes partis de la situation initiale comptant n individus en un point pour prouver la divergence du Λ-coalescent spatial partant d'un nombre infini d'individus, ce résultat peut être généralisé à tout type de condition initiale donnée. En effet de deux choses l'une : soit il existe un sommet avec un nombre infini d'individus à l'instant initial et nous pouvons directement appliquer notre théorème (par le Lemme 5.2) ; soit il existe une infinité de sommets avec au moins un individu, et dans ce cas la preuve du Théorème 2.3 peut être facilement adaptée.

8 Le cas du Beta-coalescent

Nous allons maintenant parler brièvement d'un autre type de Λ-coalescents, qui est presque aussi bien compris que le coalescent de Kingman : c'est la famille des Beta-coalescents, appelés ainsi de part leurs liens avec la loi Beta. Dans ce cas comme dans celui de Kingman, nous disposons d'une estimation de la vitesse de divergence du nombre d'individus présents.

En réalité, nous allons nous intéresser à un cas un peu plus général. Nous supposerons simplement disposer d'un Λ-coalescent dont la mesure caractéristique Λ est supposée posséder une densité suffisamment régulière au voisinage de 0, au sens où $\Lambda(dx) = g(x)dx$, pour laquelle il existe $\alpha \in (1,2)$ et $B > 0$ tel que $g(x) \sim_0 Bx^{1-\alpha}$. Cela inclut en particulier le cas où Λ est la loi $\mathrm{Beta}(\alpha, 2-\alpha)$, cas dans lequel le processus est appelé Beta-coalescent.

Commençons par estimer le taux total de coalescence au rang n.

Lemme 8.1. *λ_n est croissant en n, de plus il existe $c > 0$ tel que $\lambda_n \sim cn^\alpha$.*

Preuve. La croissance en n est une conséquence directe de la consistance du processus. Pour ce qui est de l'équivalent, on a juste à vérifier que :

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 x^{k-2}(1-x)^{n-k} d\Lambda(x) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^2} \left(1-(1-x)^n - nx(1-x)^{n-1}\right) g(x)dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons bien l'équivalent souhaité pour λ_n. □

8.1 Borne inférieure pour le processus

Nous aurons besoin par la suite des paramètres suivantes :

$$\beta = \frac{\alpha-1}{2} \,;\, \tau_n = an^{-\beta} \text{ pour un certain } a \in [a_0, a_1] \,;\, \gamma = \min\left\{1-\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{1}{8}\right\},$$

et observons qu'en particulier, γ vérifie :

$$\alpha + \gamma - 2 \leq \frac{\alpha}{2} - 1 \leq -\gamma < 0.$$

Nous notons X^n le processus du nombre de blocs d'un Λ, n-coalescent spatial, $N^n = X^n(1)$ et Y^n le coalescent non-spatial couplé dans le Lemme 5.3, nous allons commencer par étudier la quantité

$$K_n = \int_0^{\tau_n} Y_s^n ds,$$

de la même façon que dans le Lemme 7.1, mais nous aurons ici besoin d'un résultat plus précis. Cette étape est grossièrement la même que le Lemme 6.2 dans le cas du coalescent de Kingman, on étudie l'ordre de grandeur du nombre d'individus qui quittent u avant l'instant τ_n.

Lemme 8.2. *Il existe c, C dépendant uniquement de Λ tels que :*

$$\mathbb{P}(K_n \geq n^{2-\alpha+\gamma}) \leq Cn^{-\gamma},$$

$$\mathbb{P}(K_n \leq cn^{\gamma}) \leq Cn^{-\gamma}.$$

Preuve. La borne supérieure découle de manière assez immédiate de l'inégalité de Markov. En effet il suffit de constater que si $Y_t^n = k$, alors Y^n reste dans k pendant un temps exponentiel de paramètre λ_k puis décroit strictement. Par conséquent nous avons :

$$\mathbb{E}(K_n) \leq \tau_n + \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{\lambda_k} \leq Cn^{2-\alpha},$$

d'où nous tirons notre estimation.

Pour la borne inférieure, nous montrerons qu'avec grande probabilité, les premiers $M = n^{1-\alpha+\gamma}$ sauts arrivent tous avant l'instant τ_n, et que Y^n reste plus grand que $\frac{n}{2}$ après tous ces sauts. Ne considérer que ces premiers sauts dans K^n nous donnera la borne inférieure que nous cherchons.

Commençons par estimer la quantité B_m, le nombre d'individus perdus lors d'un évènement de coalescence sur une population de m individus. On peut supposer que $g \leq Cx^{1-\alpha}$, par conséquent nous avons :

$$\binom{n}{k}\lambda_{n,k} \leq C\binom{n}{k}\int_0^1 x^{k-1-\alpha}(1-x)^{n-k}dx \leq C\frac{n!\Gamma(k-\alpha)}{k!\Gamma(n-\alpha+1)} \leq Cn^{\alpha}k^{-\alpha-1}.$$

Or cette borne nous permet d'obtenir :

$$\mathbb{P}(B_m > k) \leq \frac{1}{\lambda_m}\sum_{i=k+1}^{m}\binom{m}{i}\lambda_{m,i} \leq Ck^{-\alpha}. \tag{8}$$

En particulier, $\mathbb{E}(B_m) < C$, où C ne dépend que de Λ. Dès lors le nombre total d'individus ayant coalescé dans les M premiers sauts a une espérance d'au plus CM. On note t_k l'instant du $k^{\text{ième}}$ saut, nous avons alors :

$$\mathbb{P}\left(Y_{t_M}^n \leq \frac{n}{2}\right) \leq \frac{CM}{n-\frac{n}{2}} \leq Cn^{\alpha-2+\gamma} \leq Cn^{-\gamma}.$$

De plus, sur l'évènement de forte probabilité $\{Y^n_{t_M} > \frac{n}{2}\}$, le taux de chacun des M premiers sauts est d'au moins $\lambda_{\frac{n}{2}}$. En appliquant une nouvelle fois l'inégalité de Markov, nous obtenons :

$$\mathbb{P}\left(t_M > \tau_n, Y^n_{t_M} \geq \frac{n}{2}\right) \leq \frac{M}{\lambda_{\frac{n}{2}}\tau_n} \leq Cn^{-1+\beta+\gamma} \leq Cn^{-\gamma}.$$

Nous obtenons alors que la probabilité qu'on ait fait M sauts avant τ_n et que au cours de ces M sauts on soit resté au-dessus de $\frac{n}{2}$ est d'au moins $1 - Cn^{-\gamma}$. Notons que sur cet évènement de forte probabilité, nous avons :

$$K_n = \int_0^{\tau_n} Y^n_s ds \geq \int_0^{t_M} \frac{n}{2} ds \geq \frac{nt_M}{2}.$$

Il suffit donc pour conclure de démontrer que $\mathbb{P}(t_M \leq cn^{\gamma-1}) \leq Cn^{-\gamma}$. Mais chaque saut arrivant à taux au plus λ_n, t_M est minoré par la somme de M variables aléatoires i.i.d. exponentielles de paramètre λ_n. Or l'espérance de cette somme est $\frac{M}{\lambda_n} \sim cn^{\gamma-1}$, il nous suffit alors d'utiliser le Lemme 5.1 pour conclure :

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{M} E_i \leq \frac{c}{2}n^{\gamma-1}\right) < \exp\left(-\frac{1}{16}n^{\alpha-1+\gamma}\right) \leq Cn^{-\gamma}.$$

□

Nous allons maintenant trouver une borne inférieure au nombre d'individus quittant l'origine. Ce lemme est une version plus précise du Lemme 7.2, pour lequel on prouve simplement la divergence vers l'infini de ce nombre d'immigrants.

Lemme 8.3. *Il existe $C > 0$ tel que :*

$$\mathbb{P}(Z^n_{\tau_n} < n^\gamma) \leq Cn^{-\gamma}$$

Preuve. Soit $a \in (0,1)$, on définit un temps aléatoire $T_a = \inf\{t > O : Z^n_t \geq aY^n_t\}$. Définissons alors les évènements suivants :

$$A = \{Z^n_{\tau_n} < n^\gamma\},\ A_1 = \{Z^n_{\tau_n \wedge T_a} < n^\gamma\} \text{ et } A_2 = A \cap \{\tau_n > T^a\}.$$

On a en particulier $A \subset A_1 \cup A_2$. Il nous suffit donc de majorer les probabilités des évènements A_1 et A_2.

Nous commençons par borner A_1. Rappelons les notations du Lemme 5.3 : $\mathcal{G}$ est la tribu engendrée par Y^n et $(\mathcal{F}^*_t)$ la tribu engendrée par (X^n_t) et $\mathcal{G}$.

T_a est un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}^*_t)$. Comme Y^n est décroissant de limite 1, et que Z^n_t devient supérieur à 1 presque sûrement, ce temps d'arrêt est fini presque sûrement.

Considérons la (F_t^*)-martingale S_t^n stoppée à l'instant T_a, nous utilisons l'inégalité maximale de Doob pour obtenir l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sup_{s<T_a\wedge\tau_n} |S_s^n| \geq \delta \int_0^{\tau_n} Y_s^n ds|\mathcal{G}\right) \\
\leq\ & \frac{4\rho\mathbb{E}\left(\int_0^{T_a\wedge\tau_n} M_s^n ds\Big|\,\mathcal{G}\right)}{\delta^2\left(\int_0^{\tau_n} Y_s^n ds\right)^2}\wedge 1 \\
\leq\ & \frac{4\rho}{\delta^2\int_0^{\tau_n} Y_s^n ds}\wedge 1,
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité s'obtient grâce à l'inégalité $M_s^n \leq Y_s^n$, qui implique que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{T_a\wedge\tau_n} M_s^n ds\Big|\,\mathcal{G}\right) \leq \int_0^{\tau_n} Y_s^n ds.$$

Posons maintenant A_s l'évènement :

$$A_s = \left\{1-\delta-a < \frac{Z_s^n}{\rho\int_0^s Y_u^n du} < 1+\delta\right\}.$$

En utilisant que jusqu'à l'instant T_a, $M_s^n \geq (1-a)Y_s^n$ et $Y_s^n - M_s^n \leq Z_s^n \leq aY_s^n$, l'inégalité précédente nous permet d'obtenir :

$$\mathbb{P}(A_{s\wedge T_a}^c|\mathcal{G}) \leq \frac{4\rho}{\delta^2\int_0^{\tau_n} Y_s^n ds}.$$

En effet, on a :

$$\mathbb{P}\left(Z_s^n \geq (1+\delta)\int_0^s Y_s^n ds\Big|\,\mathcal{G}\right) \leq \mathbb{P}\left(S_s^n \geq \delta\int_0^s Y_s^n ds\right)$$

et de même :

$$\mathbb{P}\left(Z_s^n \leq (1-\delta-a)\int_0^s Y_s^n ds\Big|\,\mathcal{G}\right) \leq \mathbb{P}\left(|S_{s\wedge T_a}^n| \geq \delta\int_0^s Y_s^n ds\right).$$

Dès lors, en prenant l'espérance, et choisissant a et δ tel que $1-a-\delta > \frac{1}{2}$, nous obtenons grâce au Lemme 8.2 l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}(A_1) \leq \frac{C}{n^\gamma} + n^{\alpha-2-\gamma} \leq Cn^{-\gamma}.$$

Intéressons-nous maintenant à l'évènement A_2, qui est clairement inclus dans $\{Y_{\tau_n}^n \leq an^\gamma\}$, il nous suffit donc de majorer $\mathbb{P}(Y_{\tau_n}^n \leq n^\gamma)$. Pour cela, remarquons que grâce à l'équation 8, la probabilité qu'un épisode de coalescence concerne plus de k individus est dominée par $Ck^{-\alpha}$. Par conséquent, la probabilité qu'à un instant donné Y^n tombe dans l'intervalle $[n^\gamma+1, 2n^\gamma]$ est d'au moins $1 - Cn^{-\alpha\gamma}$. De plus Y^n restera alors un temps exponentiel de paramètre inférieur à λ_{2n^γ} une fois dans cet intervalle.

Nous pouvons donc majorer la probabilité que $Y^n_{\tau_n}$ soit plus petit que n^γ par la probabilité qu'une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ_{2n^γ} soit plus petite que τ_n ajoutée à celle qu'un saut de taille au moins n^γ se produise au bon moment, d'où :

$$\mathbb{P}(Y^n_{\tau_n} \leq n^\gamma) \leq Cn^{-\alpha\gamma} + (1 - e^{\lambda_{2n^\gamma}\tau_n}) \leq Cn^{-\gamma}.$$

Ce qui conclut la preuve de ce lemme. □

Nous pouvons maintenant obtenir une borne inférieure sur le comportement du coalescent. Commençons par un lemme semblable à la borne inférieure du Lemme 6.3.

Lemme 8.4. *Soit $1 < a_0 < a_1$, et considérons le Λ-coalescent spatial partant de n individus au point u et aucun ailleurs. On pose $\tau_n = an^{-\beta}$ pour $a \in [a_0, a_1]$, et définissons l'évènement :*

$$A = \{\forall v \sim u \text{ ou } v = u, X_{\tau_n}(v) \geq \frac{n^\gamma}{4d_u}\}.$$

Il existe c et C dépendant uniquement de a_0, a_1 et d_u tels que $\mathbb{P}(A^c) \leq Cn^{-c}$.

Preuve. La partie sur la minoration $X^n_{\tau_n}(u)$ a déjà été vue précédemment, car $\mathbb{P}(Y^n_{\tau_n} \leq n^\gamma) \leq Cn^{-\gamma}$.

Pour le cas $v \sim u$, le Lemme 8.3 montre qu'avec forte probabilité (au moins $1 - Cn^{-\gamma}$, au moins n^γ individus immigrent. Il est alors évident qu'avec forte probabilité, chaque sommet v reçoit une part égale de ces individus.

Il nous reste à estimer la probabilité qu'un évènement de coalescence se produise avant l'instant τ_n pour les n^γ premiers individus à sauter. En effet un évènement de coalescence arrive à taux minoré par $\lambda_{n^\gamma} \geq cn^{\alpha\gamma}$. Dès lors nous obtenons :

$$P(X^n_{\tau_n}(v) \leq \frac{n^\gamma}{4d_u}) \leq Cn^{-\gamma} + \mathbb{P}(\frac{e}{\lambda_{n^\gamma}} \leq \tau_n) \leq Cn^{-\gamma},$$

où e est une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

Finalement, nous devons estimer la probabilité que l'un des n^γ premiers individus à sauter fasse plus de deux sauts dans les τ_n premiers instants. Or le taux de saut de ces n^γ individus est ρn^γ, qui est inférieur au taux de coalescence de ces n^γ individus. Donc la probabilité d'un évènement de migration qui empêcherait d'obtenir la borne inférieure requise est encore une fois majorée par $Cn^{-\gamma}$. □

Preuve du Théorème 2.2 (borne inférieure). On pose $f^{(k)}(n) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{\text{k termes}}$, où $f(n) = \frac{n^\gamma}{4d_u}$. On définit alors la séquence de temps (t_k) par $t_0 = 0$ et $t_{k+1} = t_k + f^{(k+1)}(n)^{-\beta}$. Nous allons itérer la minoration précédente une quantité $m_n = \frac{\log\log n}{-2\log\gamma}$, on peut vérifier que pour tout $k \leq m_n$, $f^{(k)}(n) \geq c\exp(\sqrt{\log n})$.

On pose alors B_k l'évènement pour lequel il y a au moins $f^{(k)}(n)$ individus en chaque site de la boule de centre u et de rayon k et aucune en dehors. On a $\mathbb{P}(B_1^c) \leq Cn^{-c}$, et pour tout $k \geq 1$, si on suppose B_k, en utilisant le Lemme 5.2 on peut considérer, pour minorer le nombre d'individus en $v \in B(u,k)$ ou le nombre d'individus en $w \sim v \in B(u,k)$, l'évolution d'une portion $f^{(k)}(n)$ de l'ensemble des individus présents en v à l'instant t_k pendant un temps $\tau_{f^{(k)}(n)}$. Le Lemme 8.2 nous donne alors une borne sur la probabilité, sachant que B_k est réalisé, que B_{k+1} le soit.

Nous obtenons en résumé :

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{m_n} B_k\right)^c\right) \leq \sum_{k=1}^{m_n} C \text{ Vol } B(u,k) f^{(k)}(n)^{-c} \leq C m_n \text{ Vol } B(u,m_n) f^{(m_n)}(n)^{-c}.$$

Cette borne est encore majorée, en utilisant $\text{Vol } B(u,m_n) \leq D^{m_n}$ par :

$$C m_n D^{m_n} \exp(-c\sqrt{\log n}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

8.2 Borne supérieure

Ayant la borne inférieure de notre théorème, nous nous tournons maintenant vers la borne supérieure. Pour cela nous aurons besoin d'un équivalent du Lemme 6.6 dans le cas des Λ-coalescents considérés.

Lemme 8.5. *Considérons un Λ-coalescent sur un graphe G partant d'une situation initiale quelconque, A un ensemble de sommets de G, et soit Q_t le nombre d'individus qui restent dans A tout au long de l'intervalle $[0,t]$. Il existe c et C dépendant uniquement de Λ tels que :*

$$\mathbb{P}(Q_t > C|A|t^{-\frac{1}{\alpha-1}}) \leq \exp(-c|A|).$$

Preuve. Si des individus quittent A, nous les ignorerons par la suite, donc tout se passera comme si elles avaient été tuées. Mais même en ignorant la migration, ce qui rend Q_t petit est l'action d'épisodes de coalescence. Le taux de coalescence en un site v contenant q individus est de l'ordre de Cq^α, et à chaque épisode de coalescence, au moins un individu disparait, ce qui nous permet de minorer le taux total de décroissance de Q_t par :

$$\sum_{v \in A} c(X_t(v))^\alpha \geq c|A|^{1-\alpha} Q_t^\alpha$$

en utilisant l'inégalité de Jensen (on a $\alpha > 1$).

Nous pouvons donc dominer Q_t par une chaine de mort pour laquelle le taux de décroissance de i à $i-1$ est donné par $c|A|^{1-\alpha} i^\alpha$. Il est alors facile de conclure en utilisant le Lemme 5.1. Si on note e_k une suite de variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre $\mu_k = c|A|^{1-\alpha}k^\alpha$ et $S_K = \sum_{k=K+1}^{+\infty} e_k$, on a :

$$\mathbb{E}(S_K) = \sum_{k=K+1}^{+\infty} \mu_k^{-1} \sim c_1 |A|^{\alpha-1} K^{1-\alpha},$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_K) = \sum_{k=K+1}^{+\infty} \mu_k^{-2} \sim c_2 |A|^{2\alpha-2} K^{1-2\alpha}.$$

En particulier, $\frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_K)}{\mathbb{E}(S_K)\mu_K}$ est asymptotiquement constant, donc en utilisant l'inégalité (2) pour $\varepsilon > 0$ assez petit. On en tire :

$$\mathbb{P}(S_K > 2\mathbb{E}(S_K)) \leq \exp\left(-c\frac{\mathbb{E}(S_K)^2}{\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_K)}\right) \leq e^{-cK}$$

Prenons maintenant K tel que $\mathbb{E}(S_K) \leq \frac{t}{2}$, nous pouvons en conclure :

$$\mathbb{P}(Q_t > K) < e^{-cK}.$$

Nous remarquons finalement que pour C assez grand, $K = Ct^{-\frac{1}{\alpha-1}}|A|$ fonctionne. □

Nous allons maintenant majorer X_{τ_n}, il ne nous restera qu'à étendre cette approximation encore une fois pour obtenir la majoration espérée.

Lemme 8.6. *Soit $a_0, a_1 > 0$, considérons X^n le coalescent spatial partant de n individus au sommet u et aucun ailleurs. Soit $\tau_n = an^{-\beta}$ pour $a \in [a_0, a_1]$, et notons l'évènement $A = \{X^n_{\tau_n} \leq C_1 Q\}$, où on a posé :*

$$Q(v) = \begin{cases} n^{\frac{3}{4}} & v = u \\ n^{2-\alpha+\gamma} & d(u,v) \leq r = \left\lceil \dfrac{4}{\alpha-1} \right\rceil \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Il existe deux constantes C et C_1 dépendant uniquement de a_0, a_1 et Λ telles que

$$\mathbb{P}(A^c) \leq Cn^{-\gamma}.$$

Preuve. On sait qu'avec une probabilité assez grande au plus $n^{2-\alpha+\gamma}$ individus quittent u avant l'instant τ_n, la borne est donc obtenue pour $0 < d(u,v) \leq r$.

Quelques-unes des n^γ individus peuvent coalescer, mais nous prétendons qu'il est impossible que l'un d'entre eux fasse plus de r sauts avant l'instant τ_n. En effet la probabilité qu'un individu fasse r sauts avant l'instant τ_n est majorée par $C(\rho n^{-\beta})^r$, et au plus n^γ individus quittent l'origine.

Dès lors si r est tel que $1 - \beta r < -\gamma$, la probabilité qu'un individu parmi n^γ fasse plus de r sauts est majorée par $1 - (1 - \rho^r n^{-r\beta})^{n^\gamma} \leq Cn^{-\gamma}$, ce qui traite le cas $d(u,v) > r$.

Pour le cas $v = u$, il suffit de prendre S un ensemble de sommets contenant u de taille $C_2 \log n$. Pour C_2 assez grand, grâce au Lemme 8.5, on sait qu'avec probabilité au plus Cn^γ, on a $Q_{\tau_n} \leq C|A|n^{\frac{1}{2}} < n^{\frac{3}{4}}$. De plus on sait que $X_{\tau_n}(u) < Q_{\tau_n} + Z_{\tau_n}$, donc grâce au Lemme 5.4, on conclut sans difficultés que $X_{\tau_n}(u)$ est également petit. □

Preuve du Théorème 2.2 (borne supérieure). Notons que pour tout α, nous avons $\gamma \leq \frac{\beta}{2} < \frac{1}{2}$. Posons C_1 la constante du Lemme 8.6, et $C_2 = C_1$ Vol $B(u,r)$.

On pose $f(n) = C_2 n^{\frac{3}{4}}$, et comme précédemment, $f^{(k)}(n) = f \circ \cdots \circ f(n)$. On pose de plus $t_0 = 0$ et $t_{k+1} = t_k + f^{(k+1)}(n)^{-\beta}$.

Soit A_i l'évènement tel que pour tout $v \in B(u, ir)$, $X_{t_i}(v) \leq f^{(i)}(n)$ et aucun individu n'est hors de la boule. Posons $m_n = \min\{k \in \mathbb{N} : f^{(k+1)}(n) \leq \log n\}$, le point maximal auquel on itèrera le Lemme 8.6. Il est clair que $\log n < f^{(m_n)}(n) < \log n^2$ pour n assez grand. On peut aussi vérifier que $m_n \sim c \log\log n$ et que $t_{m_n} = o(1)$.

Nous obtenons alors comme précédemment :

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{m_n} A_i\right)^c\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, avec forte probabilité, à l'instant t_{m_n}, le nombre d'individus restants est dominé par $Cf^{(m_n)}(n)$ Vol $B(u, m_n r)$, et tous les individus sont dans la boule de centre u et de rayon $m_n r$. Pour étendre notre approximation jusqu'à un instant t constant, nous posons $A = B(u, M \log\log n)$, pour M précisé ultérieurement.

Pour qu'un individu quitte l'ensemble A, il faut qu'il survive jusqu'à l'instant τ_k et fasse au moins $M \log\log n - m_n r$ sauts avant l'instant t. Dès lors, l'espérance du nombre d'individus quittant A est dominé par :

$$Cf^{(m_n)}(n) \text{ Vol } B(u, m_n r) \exp(-c(M \log\log n - m_n r))$$
$$\leq C(\log n)^2 \text{ Vol } B(u, C \log\log n) \exp(-c \log\log n(cM - C)).$$

En prenant M assez grand, cette quantité tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Dès lors tous les individus restent dans A jusqu'à l'instant t, utiliser le Lemme 8.5 nous permet de conclure, on a :

$$P(N_t^n \leq C \text{ Vol } B(u, C \log\log n)) \leq o(1) + \exp(-c \log\log n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

9 Conclusion

On a vu tout au long de ce mémoire comment il était possible d'estimer le comportement d'un Λ-coalescent sur un graphe infini général. On remarque pour commencer que pour un temps assez petit, le Λ-coalescent spatial est équivalent au Λ-coalescent non-spatial auquel on ajoute un processus de migration sur les voisins du site considéré. Ensuite, en itérant l'approximation précédente sur chacun de ces sites occupés un certain nombre de fois, nous pouvons estimer quel sera l'ordre de grandeur de la diffusion de la population sur le graphe, c'est-à-dire à trouver l'ordre de grandeur du rayon m_n de la boule qui sera presque sûrement couverte par les n premiers individus.

La minoration du nombre total d'individus présents dans le processus s'en déduit assez facilement, puisqu'on peut alors minorer stochastiquement le nombre d'individus présents à temps constant par une somme de variables aléatoires de Bernouilli i.i.d. de paramètre $e^{-\rho t}$.

Pour la majoration, nous avons besoin d'une meilleure estimation, ainsi, en partant de la même situation que dans le cas de la minoration, c'est à dire des individus raisonnablement dispersés sur une boule, il nous faut d'abord affirmer qu'avec une bonne probabilité aucun des individus restants ne fera un nombre de pas grand devant l'ordre de grandeur de m_n. Il faut enfin trouver un moyen de majorer le nombre d'individus présents à l'instant t dans un Λ-coalescent spatial à valeurs dans un graphe de taille importante, mais finie, par une constante multipliée par la taille du graphe. Ceci est possible dans le cas du coalescent de Kingman spatial ou du Beta-coalescent spatial, mais nous n'avons obtenu, en toute généralité qu'une minoration nous permettant de prouver la divergence de tout Λ-coalescent spatial sur un graphe de taille infinie.

Il est également possible d'étudier le comportement sur des temps longs de ces Λ-coalescent spatiaux, pour obtenir la manière de réaliser une limite d'échelle et espérer obtenir un processus non-trivial. Il est intéressant de noter que si le détail de la loi du Λ-coalescent a de fortes incidences sur le comportement des individus au voisinage des points de forte intensité, cette incidence est bien plus faible lorsque les individus sont initialement dispersés sur le graphe, la probabilité d'une coagulation de plus de deux individus en un même instant diminuant alors beaucoup.

A Annexe : Preuve du théorème de Schweinsberg

Nous allons prouver ici la condition nécessaire et suffisante à la descente de l'infini d'un processus Λ-coalescent non-spatial de Schweinsberg. Pour cela nous utiliserons une démonstration tirée de [4].

Rappelons que si Λ est une mesure finie sur $[0, 1]$, on note

$$\lambda_{n,k} = \int_0^1 x^{k-2}(1-x)^{n-k}\Lambda(dx) \text{ et } \lambda_n = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \lambda_{n,k},$$

respectivement le taux de coagulation de k individus choisis parmi n et le taux auquel un évènement de coalescence apparait parmi n individus. Rappelons alors ce théorème que nous souhaitons démontrer.

Théorème A.1 (Schweinsberg). *Soit Λ une mesure finie sur $[0, 1)$, on pose*

$$\phi(n) = \sum_{k=2}^{n} k \binom{n}{k} \lambda_{n,k},$$

On a alors :

$$\textit{Le } \Lambda\textit{-coalescent descend de l'infini} \iff \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\phi(n)} < +\infty.$$

Commençons par prouver que ce théorème donne une condition suffisante à la descente de l'infini du Λ-coalescent. On pose (Π_t) un processus Λ-coalescent.

Lemme A.1. *Soit ξ le temps d'atteinte de $\{\mathbb{N}, \emptyset, \emptyset, \cdots\}$ du Λ-coalescent Π, défini par :*

$$\xi = \inf\{t > 0 | \Pi_t = \{\mathbb{N}, \emptyset, \emptyset, \cdots\},$$

on a alors :

$$\mathbb{E}(\xi) \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\phi(n)},$$

donc en particulier, si la série est finie, le coalescent descend de l'infini presque sûrement.

Preuve. Nous pouvons supposer que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\phi(n)} < +\infty$, sinon il n'y a rien à démontrer.

Intéressons-nous au processus du nombre de blocs de $(\Pi_{t|[n]})$: D_t^n. Nous pouvons sans difficulté calculer les taux de transitions de ce processus de Markov. Le taux de transition de p à $p-k+1$ est $\binom{p}{k}\lambda_{p,k}$. Le générateur infinitésimal de D_t^n est donc :

$$G^n(f) : l \mapsto \sum_{k=2}^{l} \binom{l}{k} \lambda_{l,k}(f(l-k+1) - f(l)).$$

Remarquons alors que $\phi(n) = \sum_{k=2}^{n} k\binom{n}{k}\lambda_{n,k}$ est une fonction croissante de n. Nous avons supposé que la série $\sum \frac{1}{\phi(n)}$ converge, nous pouvons donc poser :

$$f(l) = \sum_{l+1}^{+\infty} \frac{1}{\phi(n)}.$$

Comme ϕ est croissante, nous avons $f(l-k+1) - f(l) \geq \frac{k}{\phi(l)}$, donc on a :

$$G^n(f)(l) \geq \sum_{k=2}^{l} \binom{l}{k} \lambda_{l,k} \frac{k}{\phi(l)} \geq 1.$$

Dès lors le processus $f(D_t^n) - \int_0^t G^n f(D_s^n) ds$ est une martingale, de plus $\xi_n = \inf\{t > 0 | D_t^n = 1\}$ est un temps d'arrêt fini presque sûrement. Soit $k \geq 1$, on utilise le Théorème d'arrêt au temps d'arrêt borné $\xi_n \wedge k$, on a :

$$\mathbb{E}\left(f(D_{\xi_n \wedge k}^n)\right) - \mathbb{E}\left(\int_0^{\xi_n \wedge k} G^n(f)(D_s^n) ds\right) = f(n).$$

En utilisant la minoration de $G^n(f)$ par 1, il vient :

$$\mathbb{E}(\xi_n \wedge k) \leq \mathbb{E}(f(D_{\xi_n \wedge k}^n) - f(n).$$

On fait alors tendre k vers $+\infty$, par convergence monotone (f et D^n sont toutes deux des fonctions décroissantes), on obtient :

$$\mathbb{E}(\xi_n) \leq f(1) - f(n).$$

Nous pouvons finalement passer à la limite quand $n \to +\infty$, par hypothèse $f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît vers $\xi_\infty = \inf\{t > 0 | D_t = 1\} = \xi$. On en tire bien :

$$\mathbb{E}(\xi) \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\phi(n)}.$$

□

Pour prouver que cette condition est également nécessaire, nous allons maintenant supposer que la série des $\frac{1}{\phi(n)}$ diverge, et que le coalescent descend de l'infini. Nous allons essayer ensuite de trouver une contradiction.

Commençons par un résultat standard de théorie des grandes déviations :

Lemme A.2. *Soit (X_n) une suite i.i.d de variables aléatoires de paramètre $x < \frac{1}{4}$, on pose $S_n^{(x)} = \sum_{k=1}^{n} X_k$, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$ on a :*

$$\mathbb{P}\left(\exists n \geq n_0 : S_n^{(x)} \geq \frac{n}{2}\right) \leq \frac{e^{-n_0 f(x)}}{1 - e^{-f(x)}}$$

avec f une fonction équivalente en 0 à $-\frac{1}{2}\log x$.

Preuve. Par inégalité de Markov, nous avons :

$$\mathbb{P}\left(S_n^{(x)} \geq \frac{n}{2}\right) \leq e^{-\frac{nt}{2}} \mathbb{E}(e^{tS_n^{(x)}}) \leq \exp\left(-n\left[\frac{t}{2} - \log(xe^t + 1 - x)\right]\right).$$

On applique alors cette inégalité en $t = \log \frac{1}{x}$, nous obtenons $\mathbb{P}(S_n^{(x)} \geq \frac{n}{2}) \leq e^{-nf(x)}$, où :

$$f(x) = \frac{1}{2}\log(\frac{1}{x}) - \log(2 - x).$$

La fonction f est strictement positive sur $]0, \frac{1}{4}[$, donc en utilisant la convergence d'une série géométrique, nous obtenons bien :

$$\mathbb{P}\left(\exists n \geq n_0 : S_n^{(x)} \geq \frac{n}{2}\right) \leq \frac{e^{-n_0 f(x)}}{1 - e^{-f(x)}}.$$

De plus f a le bon équivalent en 0. □

Nous nous intéressons maintenant au premier instant de coagulation impliquant plus de la moitié de la population.

Lemme A.3. *Supposons que le Λ-coalescent descende de l'infini. Alors avec probabilité 1, le temps d'arrêt*

$$\tau = \inf\left\{t > 0 | D_t < \frac{D_t}{2}\right\} > 0. \ p.s.$$

De plus si nous posons $\tau_n = \inf\{t > 0 | D_t^n < \frac{D_t^n}{2}\}$, alors $\tau_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tau$ p.s.

Preuve. Il est clair que le taux de coagulation relatif au coalescent de Kingman ne joue aucun rôle dans ce théorème, donc nous pouvons supposer $\Lambda(\{0\}) = 0$. Soit N une mesure de Poisson sur $\mathbb{R}^+ \times [0,1]$ d'intensité $dt \otimes \frac{1}{x^2}\Lambda(dx)$. En utilisant les notations du lemme précédent, nous allons montrer que :

$$N\left(\left\{(t,x) : t \leq 1, \exists n \geq 4 | S_n^{(x)} \geq \frac{n}{2}\right\}\right) < +\infty,$$

en calculant son espérance, ce qui nous permettra de conclure en utilisant la construction d'un Λ-coalescent à l'aide d'une mesure de Poisson.

Nous avons supposé que le processus descend presque sûrement de l'infini, donc pour tout $\varepsilon > 0$, $D_\varepsilon < +\infty$. Nous déduirons de ce résultat qu'il n'y a qu'un nombre fini de sauts sur $[0,1]$ impliquant plus de la moitié des particules. De plus par continuité à droite, $D_{0+} = D_0$, par conséquent 0 n'est pas un instant de saut et on a $\tau > 0$. Enfin, nous savons que $D_{\tau-} < +\infty$, dès lors nous avons pour tout $n \geq D_{\tau-}$, $\tau_n = \tau$. Nous en déduisons que $\tau_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \tau$ p.s. Nous obtenons également :

$$\mathbb{E}\left(N\left(\left\{(t,x) : t \leq 1, \exists n \geq 4 | S_n^{(x)} \geq \frac{n}{2}\right\}\right)\right) = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\mathbb{P}\left(\exists n \geq 4 : S_n^{(x)} \geq \frac{n}{2}\right)\Lambda(dx).$$

Nous pouvons maintenant utiliser le Lemme A.2 pour obtenir :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\mathbb{P}\left(\exists n \geq 4 : S_n^{(x)} \geq \frac{n}{2}\right)\Lambda(dx) \leq \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{e^{-4f(x)}}{(x^2(1-e^{-f(x)})}\Lambda(dx) + \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{x^2}\Lambda(dx).$$

Ces deux termes sont bornés car l'intégrande est majorée par 8 dans le premier terme, et par 16 dans le second. Nous obtenons donc que le nombre d'évènements de coagulation impliquant plus de la moitié des individus avant l'instant 1 est fini, ce qui conclut la preuve. □

Nous supposons que le coalescent descend de l'infini et que $\sum \frac{1}{\phi(n)}$ diverge. Nous allons ensuite définir une surmartingale et utiliser un théorème d'arrêt. Posons f la fonction décroissante définie par :

$$f(n) = \exp\left(-\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\phi(n)}\right).$$

Lemme A.4. *Il existe une constante C tel que pour tout $n \geq 1$, $(e^{-Ct}f(D_t^n))_{t \leq \tau_n})$ est une surmartingale positive.*

Preuve. Rappelons que le générateur infinitésimal de D^n est :

$$G^n(f) : l \mapsto \sum_{k=2}^{l} \binom{l}{k} \lambda_{l,k}(f(l-k+1) - f(l)).$$

Il suffit d'étudier le processus avant l'instant τ_n pour savoir si celui-ci descend de l'infini, puisque ceci arrive dans les premiers instants, et $\tau > 0$. Jusqu'à cet instant, D_t^n est égal au processus $\tilde{D}^n$ dans lequel les sauts de plus de la moitié de la taille courante sont ignorés, dont le générateur infinitésimal est :

$$A^n(f) : l \mapsto \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \binom{l}{k} \lambda_{l,k}(f(l-k+1) - f(l)).$$

Nous utiliserons désormais le générateur A^n. Remarquons que $\phi(n) = \sum_{k=2}^{n} k\binom{n}{k}\lambda_{n,k} = \int_0^1 \frac{1}{x^2}((1-x)^n - 1 + nx)\Lambda(dx)$. Or il existe $c > 0$ tel que pour tout n,

$$c(e^{-nx} - 1 + nx) \leq (1-x)^n - 1 + nx \leq e^{-nx} - 1 + nx.$$

Posons alors $\psi(n) = \int_0^1 \frac{1}{x^2}(e^{-nx} - 1 + nx)\Lambda(dx)$, on a alors $c\psi \leq \phi \leq \psi$. Nous avons également :

$$\frac{\psi(n)}{n} = \int_0^1 (1 - e^{-nx}) \int_x^1 \frac{1}{u^2}\Lambda(du)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{x}\Lambda(dx) > 0.$$

$h(q) = \frac{\psi(q)}{q}$ est une fonction concave, donc $h(\frac{q}{2}) \geq \frac{h(q)}{2}$, d'où $\psi(\frac{q}{2}) \geq \frac{\psi(q)}{4}$. On a pour l assez grand :

$$A^n(f)(l) = \sum_{k=2}^{\frac{l}{2}} \binom{l}{k} \lambda_{l,k} f(l)(\exp(\sum_{i=l-k+2}^{l} \frac{1}{\phi(i)}) - 1) \leq Cf(l) \sum_{k=2}^{\frac{l}{2}} \binom{l}{k} \lambda_{l,k} \frac{k}{\phi(\frac{l}{2})},$$

où on a utilisé que pour x assez petit, $e^x - 1 \leq Cx$.

On en tire $A^n_(f)(l) \leq Cf(l)\frac{\phi(l)}{\phi(\frac{l}{2}} \leq Cf(l)$, dès lors $(e^{-Ct}f(\tilde{D}^n_t))$ est une surmartingale. □

Lemme A.5. *Si $\sum \frac{1}{\phi(n)}$ diverge, alors Π ne descend pas de l'infini.*

Preuve. On suppose que le coalescent descend de l'infini, on pose $T_j^{(n)} = \inf\{t > 0 | \tilde{D}^n_t \leq j\}$. On applique le théorème d'arrêt à la surmartingale précédente pour le temps d'arrêt $T_j^{(n)}$, on en tire :

$$f(n) \geq \mathbb{E}(e^{-CT_j^{(n)}} f(\tilde{D}^n_{T_j^{(n)}})\mathbf{1}_{\{T_j^{(n)} < \tau_n\}}).$$

On passe à la limite quand $n \to +\infty$, on a $f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par hypothèse. De plus quand $t < \tau_n$, on a $\tilde{D}^n_t = D^n_t$. Ensuite, $T_j^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T_j = \inf\{t > 0 | D_t \leq j\} > 0$, donc $f(D_{T_j}) > 0$, car $D_{T_j} < +\infty$. Enfin $\tau_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tau > 0$ et $T^j \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc pour j assez grand, avec grande probabilité, $T_j < \tau$.

Ceci entraine $\mathbb{E}(e^{-CT_j}\mathbf{1}_{\{T_j < \tau\}}) = 0$, donc $T_j = +\infty$ sur l'évènement $T_j < \tau$, ce qui ne se peut puisque le processus descend de l'infini presque sûrement et que pour j assez grand, l'évènement précédent est non-négligeable. On a bien une contradiction, donc Π ne descend pas de l'infini. □

Références

[1] O. Angel, N. Berestycki, and V. Limic. Global divergence of spatial coalescents. Preprint.

[2] J. Berestycki, N. Berestycki, and V. Limic. The Λ-coalescent speed of coming down from infinity. *Ann. Probab.* To appear.

[3] J. Bertoin and J.-F. Le Gall. Stochastic flows associated to coalescent processes. *Prob. Theory Related Fields*, pages 261–288, 2003.

[4] C. Foucart. Distinguished exchangeable coalescents and generalized fleming-viot processes with immigration. 2010. To appear.

[5] J.F.C. Kingman. The coalescent. *Stochastic Process. App.*, pages 235–248, 1982.

[6] J.F.C. Kingman. On the genealogy of large populations. *J. App. Probab.*, pages 29–43, 1982.

[7] V. Limic and A. Sturm. The spatial Λ-coalescent. *Electron J. Probab.*, pages 363–393, 2006.

[8] J. Pitman. Coalescents with multiple collisions. *Ann Probab.*, pages 1870–1902, 1999.

[9] S. Sagitov. The general coalescent with asynchronous mergers of ancestor lines. *J. Appl. Prob.*, pages 1116–1125, 1999.

[10] J. Schweinsberg. A necessary and sufficient condition for the Λ coalescent to come down from infinity. *Electr. Comm. Probab.*, pages 1–11, 2000.