Martingales rétrogrades (martingales inverses) ("backward martingale")

passé $\xrightarrow{\text{présent}}$ futur

$\longleftarrow$

sens rétrograde

déf : $(\mathcal{F}_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ filtration rétrograde si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_{-n}$ est une tribu et $\forall n \leq m \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}_{-m} \subset \mathcal{F}_{-n}$

$$\dots \quad \mathcal{F}_{-2} \subset \mathcal{F}_{-1} \subset \mathcal{F}_0$$

déf : $(M_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ est une martingale rétrograde / $(\mathcal{F}_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ filtration rétrograde si $\forall m \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}|M_m| < \infty$ et $\forall n \leq m \in \mathbb{N}$, $X_{-m} = \mathbb{E}(X_{-n} \mid \mathcal{F}_{-m})$

[déf équivalente, $\forall n$, $X_{-(n+1)} = \mathbb{E}(X_{-n} \mid \mathcal{F}_{-(n+1)})$]

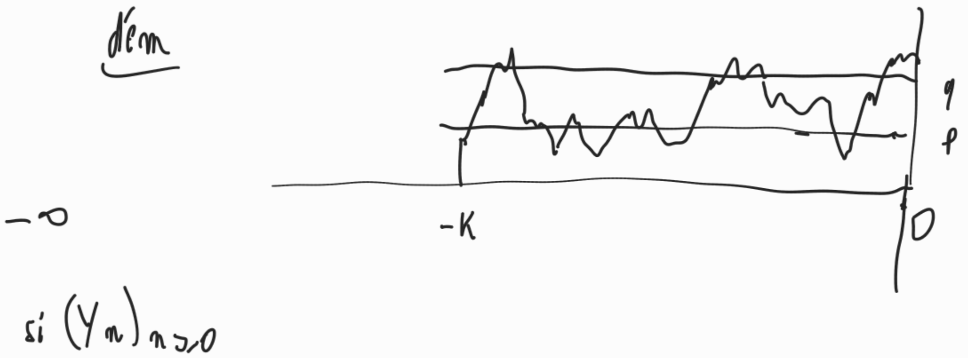
remarque : on peut définir des sous-martingales ou des surmartingales rétrogrades

Th $(M_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ martingale rétrograde

Alors (M_n) est uniformément intégrable et converge p.s. et dans L^1 vers une variable aléatoire $M_{-\infty}$. Pour tout n, $\mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_{-\infty}) = M_{-\infty}$

$$\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n\in -\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$$

dém



$p, q \in \mathbb{Q}$

$p < q$

si $(Y_n)_{n\geq 0}$

$S_1 = \inf\{n, Y_n < p\}$, $T_1 = \inf\{n > S_1, Y_n > q\}$

$S_{n+1} = \inf\{k \geq T_n, Y_k < p\}$ $T_{n+1} = \inf\{k \geq S_{n+1}, Y_k > q\}$

$N_n = \sup\{k, T_k \le n\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_k \le n\}}$

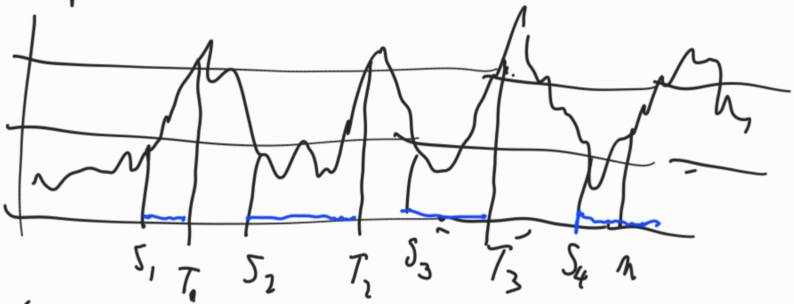
<u>Lemme</u> (Doob) si (Y_n) est une martingale,

$$(q-p)\, \mathbb{E}(N_n) \le \mathbb{E}\left[(Y_n - p)^+ - (Y_0 - p)^+\right] \qquad z^+ = \inf(z,0)$$

<u>dém</u> : $Z_n = (Y_n - p)^+$ est une sous martingale (convexité de $x \mapsto (x-a)^+$)

$H_n = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_k \le n < T_k\}}$ processus prévisible

$H_n = \begin{cases} 1 & \text{si on est dans un intervalle bleu} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



$$(H.Z)_n = \sum_{k=1}^{N_n} \underbrace{(Z_{T_k} - Z_{S_k})}_{\ge q-p} + \mathbb{1}_{\{S_{N_n+1} < n\}} \underbrace{(Z_n - Z_{S_{N_n+1}})}_{\ge 0}$$ est une sous-martingale

$$\mathbb{E}(H.Z)_n \ge (q-p)\, \mathbb{E}(N_n)$$

soit $K_n = 1 - H_n$ prévisible $\to K.Z$ sous martingale $\mathbb{E}(K.Z)_n \ge \mathbb{E}(K.Z)_0 = 0$

$$(K.Z)_n + (H.Z)_n = ((K+H).Z)_n = Z_n - Z_0$$

$$(q-p)\, \mathbb{E}(N_n) \le \mathbb{E}(H.Z)_n \le \mathbb{E}(H.Z)_n + \mathbb{E}(K.Z)_n = \mathbb{E}(Z_n) - \mathbb{E}(Z_0)$$
$$= \mathbb{E}(Y_n - p)^+ - \mathbb{E}(Y_0 - p)^+$$

<u>dém</u> du théorème soit $k \ge 1$ on pose $Y_n^{(k)} = \begin{cases} M_{-k+n} & 0 \le n \le k \\ M_0 & \text{si } n \ge k \end{cases}$

alors $(Y_n^{(k)})_{n \ge 0}$ est une martingale. si $p < q \in \mathbb{Q}$

$$(q-p)\, \mathbb{E}(N_k) = \mathbb{E}\left[(Y_k^{(k)} - p)^+ - (Y_0^{(k)} - p)^+\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[(M_{-k} - p)^+ - \underbrace{(M_0 - p)^+}_{\ge 0}\right] \le \mathbb{E}\left[(M_0 - p)^+\right]$$
$$\le \mathbb{E}(|M_0| + |p|)$$
$$\le \mathbb{E}|M_0| + |p|$$

$N_\infty = \lim_{k \to \infty} N_k$

vrai pour tout k donc $\mathbb{E}(N_\infty) \leq \frac{|p| + \mathbb{E}|M_0|}{q-p}$

donc N_∞ fini p.s

$\forall p, q$ rationnels, sur E_{pq}^c, où $\mathbb{P}(E_{p,q}) = 0$, on traverse un nombre fini de fois $[p,q]$. Sur $\bigcap_{\substack{(p,q)\in\mathbb{Q}^2 \\ p<q}} E_{p,q}^c$ on a convergence et $P(\bigcap E_{p,q}^c) = 1$

On a convergence p.s. On montre CV dans L^1 en montrant l'uniforme intégrabilité. $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \mathbb{E}(X_0 / \mathcal{F}_n)$

toutes les tribus $\mathcal{F}_n$ sont incluses dans $\mathcal{F}_0$

$\to$ la famille $\mathbb{E}(X_0 / \mathcal{F}_n)$ est u.i.

remarque : le résultat s'étend aux sous-martingales rétrogrades. L'argument d'uniforme intégrabilité est plus difficile.

Th Loi des grands nombres (version p.s et dans L^1)

$(X_1, \dots X_n \dots)$ variables aléatoires iid, $m = \mathbb{E}(X_1)$ existe

Alors $\frac{X_1 + \quad + X_n}{n} \xrightarrow[L^1]{p.s} m$

deux résultats auxiliaires

. lemme : $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sous-tribus de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_2$ indépendante de $\mathcal{F}_1 \vee \sigma(Z)$. Alors $\mathbb{E}(Z / \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) = \mathbb{E}(Z/\mathcal{F}_1)$

. Loi du 0-1 de Kolmogorov : (X_n) variables aléatoires indépendantes,

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \geq n)$ (tribu du futur)

$\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$. Alors $\mathcal{F}_\infty$ est triviale : $\forall A \in \mathcal{F}_\infty$,

$P(A) = 0$ ou 1

dém du lemme : si $B \in \mathcal{F}_1$, $C \in \mathcal{F}_2$, $A = B \cap C$ $(\in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2)$

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A Z) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathbb{1}_C Z) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathbb{1}_C \mathbb{E}(Z/\mathcal{F}_1))$$
$$= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}(Z/\mathcal{F}_1))$$

par le lemme des classes monotones, c'est vrai pour tout $A \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$

dém de la loi du 0-1 de Kolmogorov

$\mathcal{B}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$ alors $\forall n$, $\mathcal{B}_n$ est indépendante de $\mathcal{F}_{n+1}$

$\mathcal{F}_m$ si $m \geq n+1$

$\mathcal{F}_\infty$

si $A \in \bigcup_n \mathcal{B}_n$, $\forall B \in \mathcal{F}_\infty$ $P(A)P(B) = P(A \cap B)$

$\rightarrow$ si $A \in \sigma(\bigcup_n \mathcal{B}_n)$, $\forall B \in \mathcal{F}_\infty$, $P(A)P(B) = P(A \cap B)$

mais $\mathcal{F}_\infty \subset \sigma(\bigcup_n \mathcal{B}_n)$. donc $\forall B \in \mathcal{F}_\infty$ $P(B) = P(B \cap B) = P(B)P(B)$

$\Rightarrow P(B) = 0$ ou 1

dém de la loi des grands nombres :

- $S_n = X_1 + \dots + X_n$ $\forall \sigma$ permutation de $\{1 \dots n\}$, $S_n = X_{\sigma(1)} + \dots + X_{\sigma(n)}$

$\forall \sigma$, $\mathbb{E}(X_1/S_n) = \mathbb{E}(X_{\sigma(1)}/S_n) \rightarrow \forall k \leq n$, $\mathbb{E}(X_1/S_n) = \mathbb{E}(X_k/S_n)$

$n\mathbb{E}(X_1/S_n) = \mathbb{E}(X_1/S_n) + \mathbb{E}(X_2/S_n) \dots + \mathbb{E}(X_n/S_n) = \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n/S_n) = \mathbb{E}(S_n/S_n) = S_n$

$$\mathbb{E}(X_1/S_n) = \frac{S_n}{n}$$

- soit $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_n)$ $\mathcal{F}_2\ \sigma(X_{n+1}, X_{n+2} \dots)$ $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ indép

$$\mathbb{E}(X_1/S_n, X_{n+1}, X_{n+2} \dots) = \mathbb{E}(X_1/S_n) = \frac{S_n}{n} \quad (*)$$

si on pose $M_{-n} = \frac{S_n}{n}$, $\mathcal{F}_{-n} = \sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2} \dots)$

(M_{-n}) martingale rétrograde par $(*)$ $\to$ elle converge p.s et dans L^1 vers une variable aléatoire $M_{-\infty}$ mesurable / $\bigcap_n (\mathcal{F}_{-n})$

D'après la loi du 0-1 de Kolmogorov, $\bigcap_n (\mathcal{F}_{-n})$ est triviale, donc $M_{-\infty}$ est déterministe et $M_{-\infty} = \mathbb{E}(M_{-\infty}) = \mathbb{E}(M_{-n}) = \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = m$

Loi du 0-1 de Hewitt-Savage

<u>Th</u> : $X_1, \dots X_n \dots$ indépendantes, de même loi à valeurs dans E

$F : E^{\mathbb{N}^*} \to \mathbb{R}$ invariante par permutation finie [symétrique]

$\forall n$, $\forall \sigma$ permutation de $\{1, 2 \dots n\}$,

$$F(v_1 \dots v_n, v_{n+1}, v_{n+2} \dots) = F(v_{\sigma(1)} \dots, v_{\sigma(n)}, v_{n+1}, v_{n+2} \dots)$$

Alors $F(X_1, \dots X_n, \dots)$ est p.s. constante

<u>dém</u> : On suppose F bornée [sinon on remplace F par $(F \wedge M) \vee -M$]

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1 \dots X_n)$ $\qquad \mathcal{G}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2} \dots)$

$Y = F(X_1, X_2 \dots)$ $\qquad U_n = \mathbb{E}(Y / \mathcal{F}_n)$

$\qquad Z_n = \mathbb{E}(Y / \mathcal{G}_n)$

$$U_n \xrightarrow[L^1]{ps} \mathbb{E}(Y / \mathcal{F}_\infty) = Y$$

$$Z_n \xrightarrow[L^1]{ps} \mathbb{E}(Y / \mathcal{G}_\infty) = \mathbb{E}(Y)$$ $\mathcal{G}_\infty$ est triviale d'après la loi du 0-1 de Kolmogorov.

pour n assez grand $\quad \mathbb{E}(|U_n - Y|) < \varepsilon$

$\qquad \mathbb{E}(|Z_n - \mathbb{E}Y|) < \varepsilon$

U_n mesurable / $\mathcal{F}_n$ $\to$ $\exists g : E^n \to \mathbb{R}$, $\quad U_n = g(X_1 \dots X_n)$

$$\mathbb{E}\,|\,g(X_1 \dots X_n) - F(X_1 \dots X_n, X_{n+1} \dots)\,| < \varepsilon$$

inv par permutation → $\mathbb{E}\,|g(X_1,\dots X_n) - F(X_{n+1},\dots X_{2n}, X_1,\dots X_n, X_{2n+1}\dots)| < \varepsilon$

(X_k) iid $\quad \mathbb{E}\,|g(X_{n+1}\dots X_{2n}) - F(X_{n+1}\dots X_{2n}, X_1 \dots X_n, X_{2n+1}\dots)| < \varepsilon$

$$\mathbb{E}\,|Y - g(X_{n+1}\dots X_{2n})| < \varepsilon$$

$$\mathbb{E}\,|\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_n) - \mathbb{E}(g(X_{n+1}\dots X_{2n})|\mathcal{G}_n)| < \varepsilon$$

$$\mathbb{E}\,|Z_n - \mathbb{E}\, g(X_{n+1}\dots X_{2n})| < \varepsilon$$

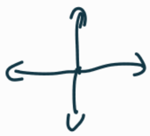
$$\mathbb{E}\,|Y - \mathbb{E}(Y)| < 3\varepsilon$$

vrai pour tout $\varepsilon > 0$ → $Y = \mathbb{E}(Y)$ p.s.

$X_1, \dots X_n$ iid à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $X_1 = \pm \varepsilon_i$ avec probabilité $\frac{1}{2d}$

(ε_i) base canonique de $\mathbb{R}^d$

$d=2$



$d=3$

$S_n = X_1 + \dots + X_n$

B borélien de $\mathbb{Z}^d$, $\quad F : (u_1, \dots u_n \dots) \mapsto 1$ si $\operatorname{card}\{n, u_n \in B\} = \infty$

0 sinon

F invariant par permutation finie

pour $d \geq 3$, il existe des boréliens B tels que p.s. on passe un temps fini dans B

sinon, on y passe un temps infini p.s.