Martingale / filtration $(\mathcal{F}_n)$ : processus $(M_n)$

$$\forall n, \ \mathbb{E}(|M_n|) < \infty$$

$$\mathbb{E}(M_{n+1} / \mathcal{F}_n) = M_n$$

## Temps d'arrêt :

*déf* : soit $(\mathcal{F}_n)$ une filtration. On dit que $T : \Omega \to \bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mesurable est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)$ si $\forall n \in \bar{\mathbb{N}}$, $\{T = n\}$ est mesurable $/ \mathcal{F}_n$

(de manière équivalente, $\forall n$, $\underbrace{\{T \le n\}}_{= \bigcup_{k \le n} \{T = k\}}$ est mesurable $/ \mathcal{F}_n$)

Intuitivement, on joue au casino, l'événement $\{T = n\}$ signifie : "on s'arrête au temps $n$".

$\mathcal{F}_n$ : information connue au temps $n$

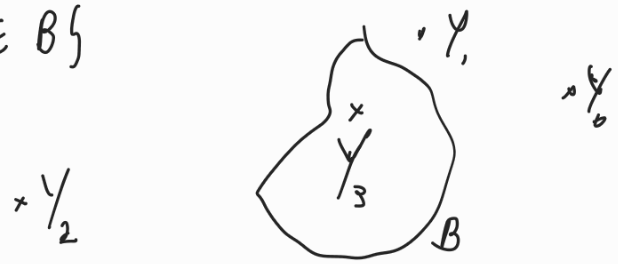
On décide de s'arrêter en fonction de ce qu'on connaît au temps $n$.
On connaît le passé et le présent mais pas l'avenir.

*exples* : (i) temps d'arrêt déterministe : $k \in \mathbb{N}$, et $\forall \omega \in \Omega$, $T(\omega) = k$

$$\{T = n\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } n \neq k \\ \Omega & \text{si } n = k \end{cases} \in \mathcal{F}_n$$

(ii) temps d'entrée. $(Y_n)$ processus adapté à $(\mathcal{F}_n)$ à valeurs dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

si $B \in \mathcal{F}$, $T_B = \inf\{n, Y_n \in B\}$




$T_B = 3$

$$\{T_B = n\} = \{Y_0 \notin B, Y_1 \notin B, \dots, Y_{n-1} \notin B, Y_n \in B\} = \underbrace{\underbrace{\{Y_0 \notin B\}}_{\in \mathcal{F}_0} \cap \underbrace{\{Y_1 \notin B\}}_{\in \mathcal{F}_1} \cdots \cap \underbrace{\{Y_{n-1} \notin B\}}_{\in \mathcal{F}_{n-1}} \cap \underbrace{\{Y_n \in B\}}_{\in \mathcal{F}_n}}_{\in \mathcal{F}_n}$$

$\in \mathcal{F}_n$

<u>contre-exemple</u> : dernier temps de sortie

$(Y_n)$ adapté à $\mathcal{F}_n$, $B \in \mathcal{F}$, $T_B = \sup\{n, Y_{n-1} \in B, \forall k \geq n, Y_k \notin B\}$

$$\{T_B = n\} = \{Y_{n-1} \in B, Y_n \notin B, Y_{n+1} \notin B \dots\} = \underbrace{\underbrace{\{Y_{n-1} \in B\}}_{\in \mathcal{F}_{n-1}} \cap \underbrace{\{Y_n \notin B\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{Y_{n+1} \notin B\}}_{\notin \mathcal{F}_n} \cdots}_{\notin \mathcal{F}_n}$$

<u>Prop</u> : (i) si $S, T$ temps d'arrêt, $S \wedge T$, $S \vee T$ sont des temps d'arrêt

$(S \wedge T = \inf(S,T)$, $S \vee T = \sup(S,T))$

(ii) $(T_n)$ suite de temps d'arrêt, alors $\inf(T_n)$, $\sup(T_n)$, $\liminf(T_n)$, $\limsup(T_n)$ sont des temps d'arrêt

<u>dém</u> (i) $\{S \wedge T \leq n\} = \overbrace{\{S \leq n\}}^{\in \mathcal{F}_n} \cup \overbrace{\{T \leq n\}}^{\mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$

$\{S \vee T \leq n\} = \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

(ii) $\{\inf(T_k) \leq n\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\{T_k \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$ etc.

<u>déf</u> : tribu du passé.

$T$ temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)$, $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}, \forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}$

<u>Prop</u> : $\mathcal{F}_T$ est une tribu. [dém : exercice]

<u>Prop</u> si $S$ et $T$ sont deux temps d'arrêt et si $S \leq T$ ps, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$

<u>dém</u> : $A \in \mathcal{F}_S$, $\forall n$

$$A \cap \{T = n\} = \bigcup_{k \leq n} \left(A \cap \{T = n\} \cap \{S = k\}\right) \in \mathcal{F}_n \to A \in \mathcal{F}_T$$

exple : $(Y_n)$ processus adapté à $(\mathcal{F}_n)$, $B \in \mathcal{F}$, $T_B = \inf\{n, Y_n \in B\}$

$A = \{\exists n, Y_n \in B\}$ alors

$A \in \mathcal{F}_{T_B}$ : $A \cap \{T_B = n\} = \{Y_0 \notin B, Y_1 \notin B \ldots Y_{n-1} \notin B, Y_n \in B\}$
$= \{T_B = n\} \in \mathcal{F}_n$

$B \subset B'$, $T_{B'} = \inf\{n, Y_n \in B'\}$, $T_{B'} \leq T_B \to \mathcal{F}_{T_{B'}} \subset \mathcal{F}_{T_B}$

Prop : $(Y_n)$ adapté par $(\mathcal{F}_n)$, $T$ temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)$. Alors la variable aléatoire $\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} Y_T$ $\begin{cases} = 0 & \text{sur } \{T = \infty\} \\ = Y_n & \text{sur } \{T = n\} \end{cases}$ est mesurable / $\mathcal{F}_T$

dém $B \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$

$\{\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} Y_T \in B\} \cap \{T = n\} = \{Y_n \in B\} \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$

(Théorème d'arrêt)

Théorème $(\mathcal{F}_n)$ filtration, $(X_n)$ martingale $/(\mathcal{F}_n)$, $T$ temps d'arrêt $/(\mathcal{F}_n)$
Alors $(X_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale. Si $T$ est borné alors $X_T \in L^1$ et
$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$

idée : $X_n$ : argent d'un joueur au casino après $n$ tours de jeu. $T$ : temps où on décide de s'arrêter (sans connaître l'avenir)

$X_{T\wedge n} = \begin{cases} X_n & \text{si } T \geq n \\ X_k & \text{si } T = k \leq n \end{cases}$ (si le joueur n'a pas décidé de s'arrêter
(si le joueur a décidé de s'arrêter au temps $k$)

$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$ : à la fin du jeu, on n'a pas gagné d'argent en moyenne

dém : $\forall n$, $T \wedge n$ est un temps d'arrêt

$n \geq 1$, $H_n = \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} = 1 - \underbrace{\mathbb{1}_{\{T \leq n-1\}}}_{\mathcal{F}_{n-1}}$ est mesurable $/ \mathcal{F}_{n-1}$

$\to (H_n)$ processus prévisible

$(X_0 + (H.X)_n)_{n \geq 0}$ est une martingale.

$$X_0 + (H.X)_n = X_0 + H_1(X_1 - X_0) + H_2(X_2 - X_1) \cdots + H_n(X_n - X_{n-1})$$
$$= X_0 + \mathbb{1}_{(T \geq 1)}(X_1 - X_0) + \mathbb{1}_{(T \geq 2)}(X_2 - X_1) \cdots + \mathbb{1}_{(T \geq n)}(X_n - X_{n-1})$$

si $k \leq n$, sur l'événement $\{T = k\}$

$$X_0 + (H.X)_n = X_0 + (X_1 - X_0) \cdots (X_k - X_{k-1}) = X_k$$

donc $(X_0 + (H.X)_n) = (X_{T \wedge n})$ est une martingale $(M_n)$

- Si $T$ est borné, $\exists N \in \mathbb{N}$, $T \leq N$ p.s. alors $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_{T \wedge N})$
$$= \mathbb{E}(M_N)$$
$$= \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(X_0)$$

---

Application : problème de la ruine du joueur

. un joueur joue à pile ou face. Initialement, il a $M_0$. Il s'arrête soit quand il a gagné $N$, soit quand il est ruiné (il a $0$)

. $X_1, X_2 \ldots X_n \ldots$ (résultats du pile ou face) v.a. iid, $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_1 = -1)$

. $M_n = M_0 + X_1 \cdots + X_n$ martingale $\qquad \mathbb{E}(X_1) = 0$

$T^{(1)} = T_{M_0 + N} = \inf\{n, M_n = M_0 + N\}$ temps d'arrêt

$T^{(2)} = T_0 = \inf\{n, M_n = 0\}$ temps d'arrêt

$T = T^{(1)} \wedge T^{(2)}$ temps d'arrêt.

$(M_{T \wedge n})$ martingale

Propriété : $T < \infty$ p.s. $\qquad \mathbb{P}(T \geq n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$$\mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(M_0) = M_0$$

$$= \mathbb{E}\left(M_{T\wedge n}\left(\mathbb{1}_{\{T\le n,\, T=T^{(1)}\}} + \mathbb{1}_{\{T\le n,\, T=T^{(2)}\}} + \mathbb{1}_{\{T>n\}}\right)\right)$$

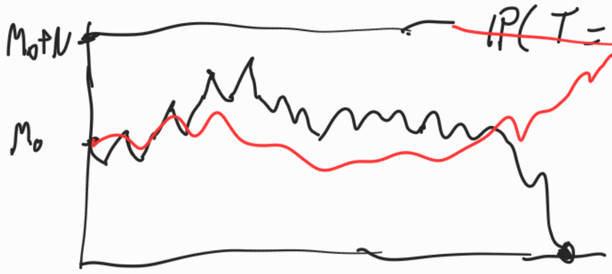
$$= \mathbb{E}\left(M_{T\wedge n}\,\mathbb{1}_{(T\le n,\, T=T^{(1)})}\right) + \mathbb{E}\left(M_{T\wedge n}\,\mathbb{1}_{\{T\le n,\, T=T^{(2)}\}}\right) + \mathbb{E}\left(M_{T\wedge n}\,\mathbb{1}_{T>n}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left((M_0+N)\,\mathbb{1}_{(T\le n,\, T=T^{(1)})}\right) + \mathbb{E}\left(0\,\mathbb{1}_{(T\le n,\, T=T^{(2)})}\right) + \mathbb{E}\left(M_{T\wedge n}\,\mathbb{1}_{(T>n)}\right)$$

$$= (M_0+N)\underbrace{\mathbb{P}(T\le n,\, T=T^{(1)})}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(T=T^{(1)})} + 0 + \underbrace{\mathbb{E}\left(M_{T\wedge n}\,\mathbb{1}_{(T>n)}\right)}$$

$$0 \le \mathbb{E}\left(M_{T\wedge n}\,\mathbb{1}_{(T>n)}\right) \le (M_0+N)\,\mathbb{P}(T>n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (*)$$

$$M_0 = \mathbb{E}(M_{T\wedge n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (M_0+N)\,\mathbb{P}(T=T^{(1)})$$




$$\mathbb{P}(T=T^{(1)}) = \frac{M_0}{M_0+N} \qquad \underbrace{\mathbb{P}(T=T^{(2)})}_{\text{risque de ruine}} = \frac{N}{M_0+N}$$

On n'a pas utilisé directement le théorème d'arrêt pour un temps d'arrêt borné car $T$ n'est pas borné. On a utilisé le fait que $(M_{T\wedge n})$ est une martingale est un argument de convergence dominée $(*)$

<u>contre exemple</u> : $T^{(3)} = T_{M_0+1} = \inf\{n,\, M_n = M_0+1\}$ temps d'arrêt.

$M_{T^{(3)}\wedge n}$ martingale donc $\forall n,\ \mathbb{E}(M_{T^{(3)}\wedge n}) = \mathbb{E}(M_0) = M_0$

On peut montrer que $T^{(3)} < \infty$ donc $M_{T^{(3)}} = M_0+1$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_{T^{(3)}\wedge n}) = M_0 \neq M_{T^{(3)}} = M_0+1$$

contre exemple au théorème d'arrêt : $T^{(3)}$ non borné

$$\mathbb{E}(M_{T^{(3)}\wedge n}) = \mathbb{E}\left(M_{T^{(3)}\wedge n}\,\mathbb{1}_{(T^3\le n)}\right) + \mathbb{E}\left(M_{T^3\wedge n}\,\mathbb{1}_{T^{(3)}\ge n+1}\right)$$

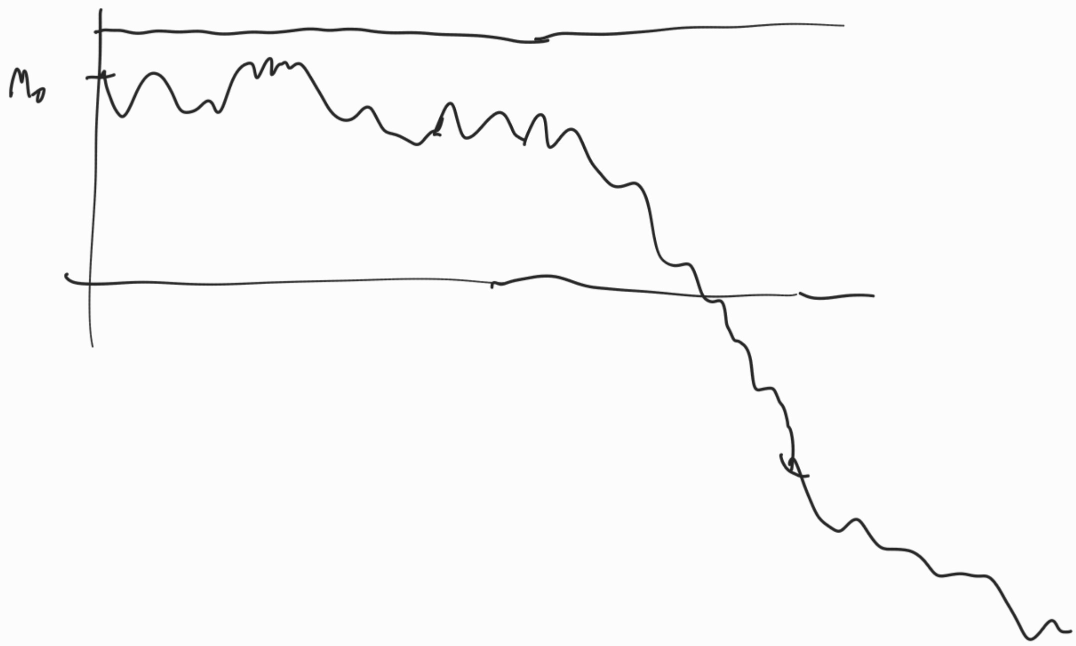
$$= (M_0+1)\,\mathbb{P}(T^{(3)}\le n) + \mathbb{E}\left(M_{T^{(3)}\wedge n}\,\mathbb{1}_{T^{(3)}\ge n+1}\right)$$

$$\mathbb{E}\left(M_{T^{(3)}\wedge n}\, \mathbb{1}_{T^{(3)}\geq n+1}\right) = M_0 - (M_0+1)\, \mathbb{P}(T_3 \leq n) \to -1$$

$$\mathbb{E}\left(M_{T^{(3)}\wedge n}\, \mathbb{1}_{T^{(3)}\geq n+1}\right) \to -1$$

$$\mathbb{E}\left(M_{T^{(3)}\wedge n} \mid T^{(3)} \geq n+1\right) = \frac{\mathbb{E}\left(M_{T^{(3)}\wedge n}\, \mathbb{1}_{T^{(3)}\geq n+1}\right)}{\mathbb{P}(T^{(3)}\geq n+1)} \sim \frac{-1}{\mathbb{P}(T^{(3)}\geq n+1)}$$

$$\mathbb{E}\left(M_{T^{(3)}\wedge n} \mid T^{(3)} \geq n+1\right) \to -\infty$$




Martingale exponentielle et théorème d'arrêt :

$M_n = M_0 + X_1 + \dots + X_n$ où les $X_i$ sont iid, $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$

$s > 0$

$Y_n = e^{sM_n}$ , $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1 \dots X_n)$

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} / \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left(e^{s(M_n + X_{n+1})} \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}\Big(\underbrace{e^{sM_n}}_{\mathcal{F}_n\text{-mes}}\ \underbrace{e^{sX_{n+1}}}_{\text{indép de } \mathcal{F}_n} / \mathcal{F}_n\Big)$$

$$= e^{sM_n}\, \mathbb{E}(e^{sX_{n+1}}) = Y_n \left(\frac{e^s + e^{-s}}{2}\right) = Y_n\, ch(s)$$

$Z_n = \dfrac{Y_n}{(ch(s))^n}$ est une martingale suppose $M_0 < 0$, $T = T_0 = \inf\{n, M_n = 0\}$ temps d'arrêt

$$Z_{T\wedge n} = \frac{e^{\theta M_{T\wedge n}}}{(ch(\theta))^{T\wedge n}}$$ martingale

$$E(Z_{T\wedge n}) = Z_0 = e^{\theta M_0}$$

$$Z_T = \frac{e^{\theta M_T}}{(ch(\theta))^T} = \frac{1}{ch(\theta)^T}$$

$$M_{T\wedge n} \leq 0 \qquad e^{\theta M_{T\wedge n}} \leq 1 \quad ; \quad \frac{1}{(ch(\theta))^{T\wedge n}} \leq 1$$

$$Z_0 = E(Z_{T\wedge n}) = E\left(Z_{T\wedge n}\left(\mathbb{1}_{(T\leq n)} + \mathbb{1}_{(T\geq n+1)}\right)\right)$$

$$= E(Z_{T\wedge n}\mathbb{1}_{(T\leq n)}) + E(Z_{T\wedge n}\mathbb{1}_{T\geq n+1})$$

$$= E\left(\frac{1}{(ch(\theta))^T}\mathbb{1}_{T\leq n}\right) + E(Z_{T\wedge n}\mathbb{1}_{T\geq n+1})$$

$$0 \leq E(Z_{T\wedge n}\mathbb{1}_{(T\geq n+1)}) \leq P(T\geq n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$E\left(\frac{1}{ch(\theta)^T}\mathbb{1}_{(T\leq n)}\right) \to Z_0$$

cv dominée $$E\left(\frac{1}{ch(\theta)^T}\mathbb{1}_{T\leq n}\right) \to E\left(\frac{1}{ch(\theta)^T}\right)$$

$$E\left(\frac{1}{ch(\theta)^T}\right) = Z_0 = e^{\theta M_0}$$

$$E\left(\left(\frac{2}{e^{\theta}+e^{-\theta}}\right)^T\right) = e^{\theta M_0}$$

$$v = \frac{2}{e^{\theta}+e^{-\theta}} \to \underbrace{e^{\theta}}_{x} = f(v) \qquad \frac{2}{x+\frac{1}{x}} = v \;;\; \left(x+\frac{1}{x}\right)v = 2$$

$$\mathbb{E}(U^T) = f(U)^{n_0}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T=n)\, U^n = f(U)^{n_0}$$

→ on en déduit $\mathbb{P}(T=n)$ pour tout $n$

↳ coefficient en $U^n$ de la série entière

$$U \longmapsto f(U)^{n_0}$$

pour calculer la fonction $f$, on résout l'équation $\left(x + \frac{1}{x}\right) U = 2$ en $x$

→ $x = f(U)$