$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espace de probabilités

X variable aléatoire à valeurs dans un espace métrique (M,d) :

fonction mesurable $(\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{X} (M,d)$

- CV de variables aléatoires vues comme des fonctions :

  CV ponctuelle d'une suite de fonctions (f_n) : $\forall x,\ f_n(x) \longrightarrow f(x)$

1 pour les variables aléatoires, une version plus faible de la CV ponctuelle est la CV presque sûre : $X_n \xrightarrow{ps} X$ si $\exists\, B \subset \mathcal{F}$, $P(B)=0$ tq $\forall \omega \notin B$, $X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)$

(2) cv ds L^p, $1 \leq p < \infty$

$X_n \xrightarrow{L^p} X$ si $\mathbb{E}(|X_n - X|^p) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $\quad p < \infty$ $\rightarrow$ distance(X_n, X) dans $L^p \to 0$

$p = \infty$

$X_n \xrightarrow{L^\infty} X$ si $\mathbb{E}(\sup |X_n - X|) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

. CV en probabilité

$X_n \xrightarrow{P} X$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

si on définit la distance $d(X,Y) = \mathbb{E}(\underbrace{|X-Y| \wedge 1}_{\inf(1, |X-Y|)})$

$X_n \xrightarrow{P} X \iff d(X_n, X) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (Prop 10.1.1)

<u>Prop</u> si (X_n) converge vers X ps ou dans L^p $(p \geq 1)$ alors $X_n \xrightarrow{P} X$.

La réciproque est fausse mais si $X_n \xrightarrow{P} X$, il existe $(n_k)_{k \geq 0}$

tq $X_{n_k} \underset{k\to\infty}{\xrightarrow{ps}} X$

<u>contre exemple</u> : $(Y_n), (Z_n)$ variables aléatoires indépendantes, uniformes sur $[0,1]$

$X_n = \mathbb{1}_{\{|Y_n - Z_n| \geq \frac{1}{n}\}}$

$X_n \xrightarrow{P} X$ où $X = 0$: $\forall \varepsilon > 0$

$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \underbrace{\mathbb{P}(|Y_n - Z_n| \geq \tfrac{1}{n})}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}$

Il n'y a pas CV presque sûre :

$$p_n = \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|Y_n - Z_n| \geq \tfrac{1}{n}) \geq \tfrac{1}{n}$$

$$\sum p_n = \infty$$

les événements $\{|X_n - X| > \varepsilon\} = \{X_n = 1\}$ sont indépendants

D'après Borel-Cantelli, p.s, il existe une infinité d'indices n tels que $\{X_n = 1\}$ se produise

→ p.s, $|X_n - X| = 1$ pour une infinité d'indices n

→ p.s, (X_n) ne CV pas vers X

<u>Prop</u> Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et si (X_n) est bornée dans L^q,

alors $\forall p \in [1, q)$, $X_n \xrightarrow{L^p} X$

Loi des grands nombres

<u>Loi du 0-1</u> (X_n) suite de v.a. indépendantes,

$(\mathcal{B}_n)$: tribu engendrée par les v.a. $(X_k)_{k \geq n}$

$\mathcal{B}_n = \sigma(X_k, k \geq n)$ [tribu → σ-algebra]

Français anglais

plus petite tribu contenant tous les événements mesurables par les v.a $(X_k, k \geq n)$

$\mathcal{B}_n$ est une famille décroissante de tribus

$A \in \mathcal{B}_n \Rightarrow A \in \mathcal{B}_{n-1}$

soit $\underbrace{\mathcal{B}_\infty}_{\text{tribu asymptotique}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ alors $\forall A \in \mathcal{B}_\infty$

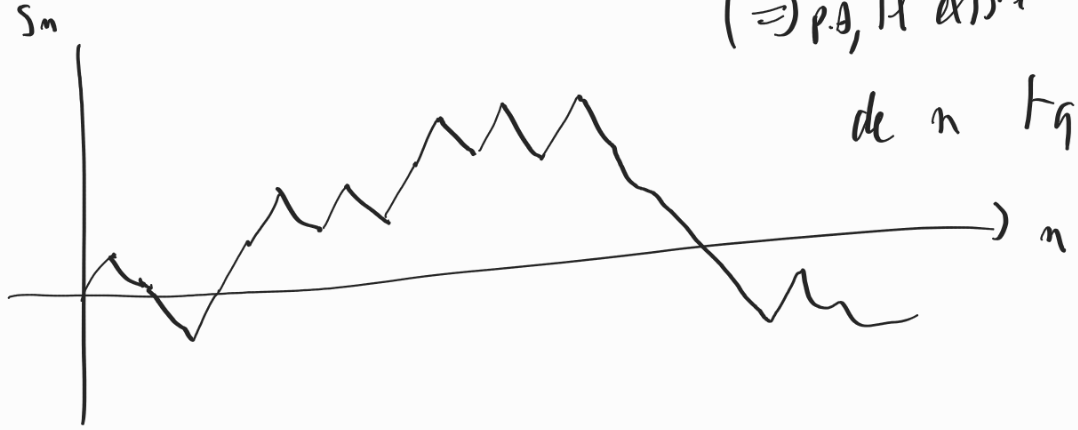
$P(A) = 0$ ou 1

<u>Prop</u> (X_n) v.a. indép, de même loi $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$

$S_n = X_1 + X_2 \dots + X_n$ $\quad S_0 = 0$

alors p.s $\{\sup_n S_n = +\infty\}$, $\{\inf S_n = -\infty\}$

($\Rightarrow$ p.s, il existe une infinité de n tq $S_n = 0$)



l'événement $\{\sup_n S_n = +\infty\}$ ne dépend pas de X_1

<u>Th</u> (X_n) variables aléatoires iid (indépendantes, identiquement distribuées) réelles que $\mathbb{E}(X_1)$ existe [$X_1 \in L^1$]

$$\frac{1}{n}(X_1 + X_2 \dots + X_n) \xrightarrow[n \to \infty]{p.s} \mathbb{E}(X_1)$$

[en fait, on a aussi cv dans L^1. On le verra en étudiant les martingales inverses]

<u>contre-exemple</u> : (X_n) indép., à valeurs dans $\mathbb{Z}$, $\forall k \geq 0$,

$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n = -k) = \frac{c}{k^\alpha}$ $1 < \alpha \leq 2$

alors X_n n'est pas dans L^1

On peut montrer que $\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + X_2 \dots X_n}{n^{\alpha - 1}}\right) \geq x$ converge pour tout

$x \in \mathbb{R}$, vers $F(x)$ où F est une fonction non triviale

En particulier, $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ ne CV pas vers 0

[Lois stables]

<u>CV en Loi</u>

<u>déf</u> : (X_n) CV en loi vers X si $\forall f$ fonction continue bornée,

$\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X))$. Notation $X_n \xrightarrow{(\mathcal{L})} X$, $X_n \xrightarrow{(d)} X$ (distribution)

<u>remarques</u> : ① si (X_n) est à valeurs dans $\mathbb{N}$ [plus généralement, dans un ensemble discret] alors $(X_n) \xrightarrow{(\mathcal{L})} X \iff \forall k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{P}(X = k)}$$

En effet, on prend la fonction $f(x) = \mathbb{1}_{\{x = k\}}$

② si X_n sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

ayant une densité f_n et si $f_n \to f$ presque partout, avec $\int f = 1$

alors $X_n \xrightarrow{(d)} X$ où X est une variable aléatoire de densité f

. réciproquement, une variable aléatoire ayant une densité peut être la limite en loi d'une suite de v.a. qui n'ont pas de densité

<u>exple</u> : $X_n = \frac{1}{n}(\delta_0 + \delta_{1/n} \dots + \delta_{\frac{n-1}{n}})$ n'a pas de densité

alors $X_n \xrightarrow{(\ell)} X$ où X est la loi uniforme sur $[0,1]$

en effet, $\forall f \in C_b$ $\quad \mathbb{E}(f(X_n)) = \frac{1}{n}\left[f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) \dots + f(\frac{n-1}{n})\right]$

$$\to \int_0^1 f(x)\,dx = \mathbb{E} f(X)$$

sommes de Riemann

. on peut aussi avoir des v.a. (X_n) ayant une densité et qui CV en loi vers X où X n'a pas de densité

<u>exple</u> X_n : loi uniforme sur $[0, \frac{1}{n}]$, de densité $f(x) = n\,\mathbb{1}_{\{x \in [0,\frac{1}{n}]\}}$

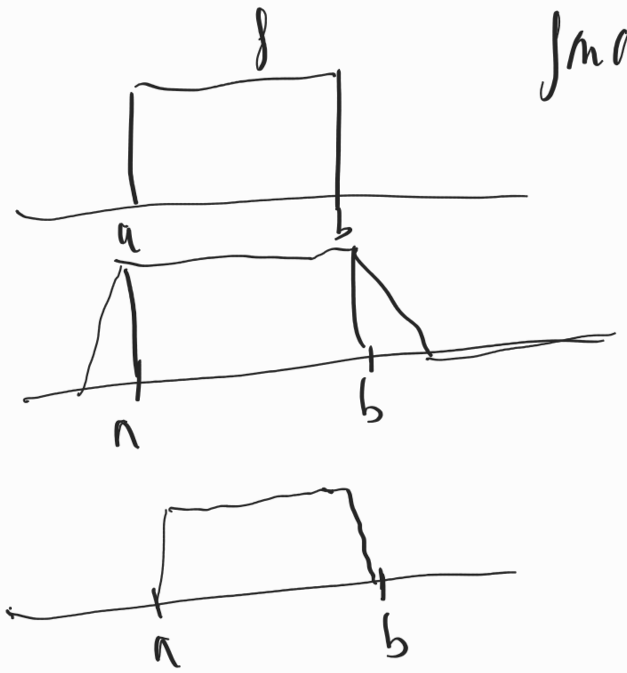
$X_n \xrightarrow{(\ell)} X$ où $X = \delta_0$ $\qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 0$

$\qquad \mathbb{P}(X = 0) = 1$

$\forall f \in C_b$, $\mathbb{E}[f(X_n)] = n\int_0^{\frac{1}{n}} f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)$ puisque f est continue en 0

<u>Prop</u> : . si $(X_n) \xrightarrow{(P)} X$, alors $X_n \xrightarrow{(\ell)} X$

. si $X = \delta_a$ et si $X_n \xrightarrow{(\ell)} X$, alors $(X_n) \xrightarrow{P} X$



fonction indicatrice non continue

approximation de f "par l'extérieur"

approximation "par l'intérieur"

<u>Prop</u> on a l'équivalence des 4 assertions suivantes $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)]$

(i) $X_n \xrightarrow{(d)} X$

(ii) $\forall$ G ouvert, $\liminf \mathbb{P}(X_n \in G) \geq \mathbb{P}(X \in G)$

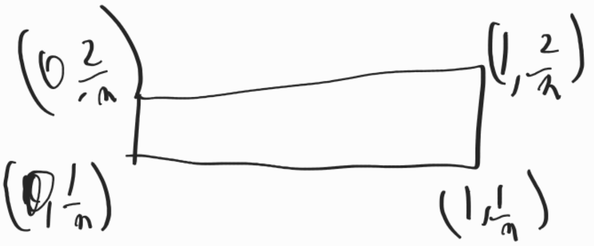
(iii) $\forall$ F fermé, $\limsup \mathbb{P}(X_n \in G) \leq \mathbb{P}(X \in G)$

(iv) $\forall$ B borélien tel que $\mathbb{P}(X \in \partial B) = 0$

$$\lim \mathbb{P}(X_n \in B) = \mathbb{P}(X \in B)$$

$\partial B = \bar{B} \setminus \mathring{B}$

autres contre exemples : X_n loi uniforme sur un rectangle



$X_n \xrightarrow{(P)} X$ où X suit la loi uniforme sur

soit $I = [0,1]$, $\mathring{I} = \emptyset$

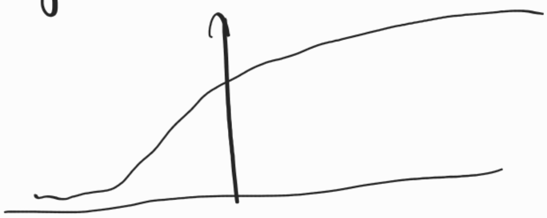
$\bar{I} = I$

$\partial I = \bar{I} \setminus \mathring{I} = I$

$P(X \in \partial I) = P(X \in I) = 1$; $P(X_n \in I) = 0 \not\Rightarrow P(X \in I) = 1$

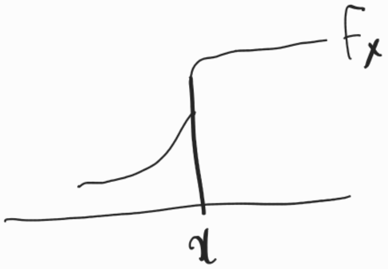
. Cas des fonctions de répartition (dans $\mathbb{R}$)

Si X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$, sa fonction de répartition est la fonction $F_X : x \mapsto P(X \leq x)$ [si F_X est dérivable, sa dérivée est la densité de X]



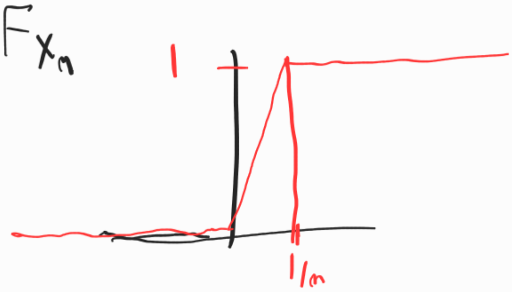
Prop (X_n) v.a à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $X_n \xrightarrow{(P)} X$ si et seulement si $F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x)$ en tout x où la fonction F_X est continue

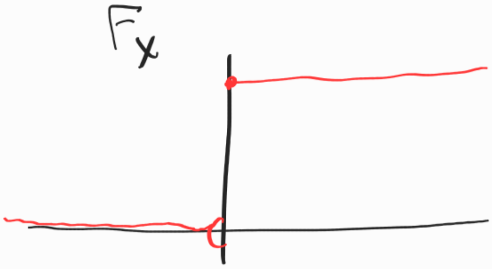
remarque : les fonctions de répartition sont croissantes, elles sont discontinues en x si et seulement si on a un atome en X



$$P(X = x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} F_X(y) - \lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} F_X(y)$$

$X_n =$ uniforme sur $[0, \frac{1}{n}] \xrightarrow{(P)} X = \delta_0$





$F_{X_n}(x) \to F_X(x)$
sauf en $x=0$
$F_{X_n}(0)=0$; $F_X(0)=1$

<u>Cas des fonctions</u> à support compact : $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$: fonctions réelles que le support :
$\overline{\{x,\ f(x)\neq 0\}}$ est un compact

<u>Prop</u> : X_n, X v.a. à support dans $\mathbb{R}^d$. H un ensemble de fonctions continues bornées tel que $\overline{H} \supset \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ [$\overline{H}$: adhérence pour la norme sup]

Alors on a l'équivalence des 3 assertions :

(i) $X_n \xrightarrow{(d)} X$

(ii) $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d) \quad \mathbb{E}(\varphi(X_n)) \to \mathbb{E}[\varphi(X)]$

(iii) $\forall \varphi \in H \,. \quad \mathbb{E}[\varphi(X_n)] \to \mathbb{E}[\varphi(X)]$