Rappel : pas de cours de probabilités la semaine prochaine

→ cours d'algèbre avec L. Merel

Urne de Pólya

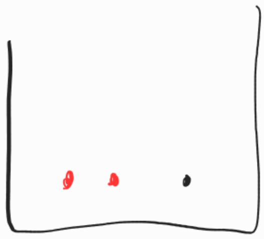
On a une urne avec des boules noires ou rouges.

Au temps 0, $\begin{cases} 1 \text{ boule noire} \\ 1 \text{ boule rouge} \end{cases}$

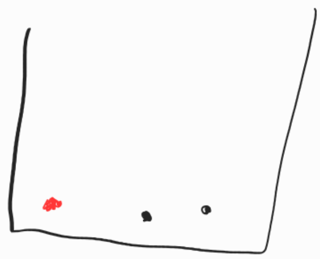
$n=0$

Au temps 1, on tire au hasard une boule dans l'urne.
$\mathbb{P}(\text{boule rouge}) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\text{boule noire})$. On remet la boule dans l'urne et on ajoute 1 boule de la même couleur

$n=1$



si on a tiré une boule rouge



si on a tiré une boule noire

Au temps $n+1$: on tire une boule au hasard, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule de la même couleur. R_n = nombre de boules rouges au temps n. $R_0 = 1$ et au temps n, on a $n+2$ boules.

Au temps $n+1$, $\mathbb{P}(\text{tirer une boule rouge}) = \dfrac{R_n}{n+2}$

Soit M_n la proportion de boules rouges au temps n : $\dfrac{R_n}{n+2} = M_n$

$\mathcal{F}_n = \sigma(M_1, M_2 \ldots M_n)$ $\qquad (\mathcal{F}_n)$ filtration

Th : (M_n) martingale / $\mathcal{F}_n$

dém : $\mathbb{E}(M_{n+1} / \mathcal{F}_n) = \frac{R_n}{n+2} \quad \frac{R_n + 1}{n+3} + \left(1 - \frac{R_n}{n+2}\right) \frac{R_n}{n+3}$

$$= \frac{R_n}{(n+2)(n+3)} \left[R_n + 1 + n+2 - R_n \right] = \frac{R_n (n+3)}{(n+2)(n+3)} = \frac{R_n}{n+2} = M_n$$

Conséquence : comme M_n est positive, elle converge p.s. De plus, $M_n \in [0,1]$ est bornée. D'après le théorème de convergence dominée, M_n converge L^1. Soit M_∞ la limite de M_n, M_∞ est une variable aléatoire.

Thm : (i) $\forall n \geq 0$, R_n est uniformément distribuée dans $\{1, 2 \ldots, n+1\}$

(ii) $\rightarrow M_\infty$ est uniformément distribuée sur $[0,1]$

dém : (i) démonstration par récurrence. vrai pour $n=0$

Si c'est vrai pour n, calculons $\mathbb{P}(R_{n+1} = k)$, $k \in \{1, 2 \ldots n+2\}$

$k=1$ $\quad \mathbb{P}(R_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(R_n = 1$ et on a tiré une boule noire$)$

$$= \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2}$$

$k \geq 2$ $\quad \mathbb{P}(R_{n+1} = k) = \mathbb{P}(R_n = k$ et on a tiré une boule noire$) +$

$\mathbb{P}(R_n = k-1$ et ——— rouge$)$

$$= \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{k}{n+2}\right) + \frac{1}{n+1} \frac{k-1}{n+2} = \frac{n+2-k+(k-1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2}$$

$\mathbb{E}(M_{n+1} / \mathcal{F}_n)$ $\qquad$ au temps $n+1$, soit on a tiré une boule rouge

soit on a tiré noire

$$\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left(M_{n+1}(\mathbb{1}_{A_{n+1}} + \mathbb{1}_{A_{n+1}^c}) / \mathcal{F}_n\right)$$

$$\mathbb{E}(M_{n+1}\mathbb{1}_{A_{n+1}} / \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\Big(\underbrace{\frac{R_n+1}{n+3}}_{\text{mesurable}/\mathcal{F}_n} \mathbb{1}_{A_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n\Big)$$

$$= \frac{R_n+1}{n+3}\, \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n\right)$$

$$= \frac{R_n+1}{n+3}\, \underbrace{\mathbb{P}(A_{n+1} / \mathcal{F}_n)}_{\frac{R_n}{n+2}} = \frac{(R_n+1)}{n+3} \frac{R_n}{n+2}$$

$$\forall k,\ \mathbb{P}(A_{n+1} \mid R_n = k) = \frac{k}{n+2}$$

---

dem (ii) : $\frac{R_n}{n+2} = M_n$ uniforme sur $\left(\frac{1}{n+2}, \frac{2}{n+2} \cdots \frac{n+1}{n+2}\right)$

si $x \in [0,1]$

$\mathbb{P}(M_n \leq x) = \frac{\lfloor (n+2) x \rfloor}{n+2} \longrightarrow x \Rightarrow M_n$ converge en loi vers la loi uniforme $[0,1]$. Donc si $M_n \xrightarrow{ps} M_\infty$, M_∞ suit la loi uniforme $[0,1]$

Remarque : on peut prendre pour $n=0$ une autre répartition des boules noires et rouges. $\frac{R_n}{n+B}$ est une martingale, avec B nombre de boules à $n=0$

La martingale est bornée $(\in [0,1])$ donc elle converge p.s. vers M_∞

mais M_∞ ne suit pas la loi uniforme sur $[0,1]$

(M_n) bornée $\Rightarrow$ bornée dans L^p pour tout $p \geq 1$

variation quadratique : $\mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)^2 | \mathcal{F}_n)$

$A_{n+1} = \{$ on tire une boule rouge au temps $n+1\}$

$$\mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)^2 \mathbb{1}_{A_{n+1}} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{(n+2)M_n + 1}{n+3} - M_n\right)^2 \mathbb{1}_{A_{n+1}} | \mathcal{F}_n\right)$$

$$\left(\frac{(n+2)M_n + 1}{n+3} - M_n\right)^2 \mathbb{P}(A_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \left(\frac{(n+2)M_n + 1}{n+3} - M_n\right)^2 M_n$$

$$\mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)^2 \mathbb{1}_{A_{n+1}^c} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{(n+2)M_n}{n+3} - M_n\right)^2 \mathbb{1}_{A_{n+1}^c} | \mathcal{F}_n\right]$$

$$\frac{M_n^2}{(n+3)^2} \mathbb{P}(A_{n+1}^c | \mathcal{F}_n) = \frac{M_n^2}{(n+3)^2}(1 - M_n)$$

$$\mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)^2 | \mathcal{F}_n) = \frac{M_n}{(n+3)^2}\left(M_n(1-M_n) + (M_n - 1)^2\right) = \frac{M_n(1-M_n)}{(n+3)^2}$$

$$\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n)^2 = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)^2 | \mathcal{F}_n)\right] \leq \frac{1}{(n+3)^2}$$

Les $(M_{n+1} - M_n)$ sont des variables aléatoires orthogonales

$$\mathbb{E}((M_\infty - M_n)^2) = \mathbb{E}(M_{n+1} - M_n)^2 + \mathbb{E}(M_{n+2} - M_{n+1})^2 \dots$$
$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+3)^2}$$

$V \sim$ uniforme $[0,1]$

$(U_n)_{n \geq 1}$ iid, uniformes $[0,1]$, indép de V

$X_n = \mathbb{1}_{\{U_n \leq V\}}$

on va voir que $(X_n)_{n\geq 1}$ a même loi que $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$

Idée : Si on beaucoup de X_i, $i \leq n$ qui valent 1 ; alors on a beaucoup de $U_i \leq V$, $i \leq n$. On peut en déduire V est proche de 1 et donc U_{n+1} a une grande probabilité d'être $\leq V$, donc X_{n+1} a une grande probabilité de valoir 1

$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_2 \ldots X_n = \varepsilon_n)$ où les ε_i valent 0 ou 1

$$\frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = 1, X_1 = \varepsilon_1 \ldots X_n = \varepsilon_n)}{\mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1 \ldots X_n = \varepsilon_n)}$$

Si $V = x$ et $\varepsilon_1 = 1$, $\mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(U_1 \leq V) = x$

$\varepsilon_1 = 0$ $\quad \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1) = 1 - x$

donc $\mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1) = x^{\varepsilon_1}(1-x)^{1-\varepsilon_1}$

$$\mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1, \ldots X_n = \varepsilon_n) = \int_0^1 \prod_{i=1}^n x^{\varepsilon_i}(1-x)^{1-\varepsilon_i}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{S_n}(1-x)^{n-S_n}\,dx$$

$S_n = X_1 + X_2 \ldots + X_n$

Prop $k, \ell \in \mathbb{N}$ $\quad \displaystyle\int_0^1 x^k (1-x)^\ell\,dx = \frac{k!\,\ell!}{(k+\ell+1)!}$

démonstration par récurrence

remarque : on peut prendre k, ℓ réels > -1 $\rightarrow$ fonction bêta (B) qui a des relations avec la fonction Γ

$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_1 = \varepsilon_1 \dots X_n = \varepsilon_n) =$

$$\frac{\int_0^1 x^{S_n+1}(1-x)^{n-S_n}\,dx}{\int_0^1 x^{S_n}(1-x)^{n-S_n}\,dx} = \frac{(S_n+1)!\,(n-S_n)!}{(n+2)!}\;\frac{(n+1)!}{S_n!\,(n-S_n)!}$$

$$= \frac{S_n+1}{n+2}$$

$$\mathbb{P}(A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \frac{R_n}{n+2} = \frac{1+\sum_{i=1}^{n} A_i}{n+2}$$ pour l'urne de Pólya

On en déduit que la suite (X_n) a même loi que la suite $\mathbb{1}_{A_n}$

$\rightarrow \left(\frac{S_n+1}{n+2}\right)_{n\geq 1}$ a même loi que (M_n)

$\frac{S_n+1}{n+2}$ CV p.s vers T $\qquad S_n = \mathbb{1}_{\{U_1 \leq V\}} + \mathbb{1}_{\{U_2 \leq V\}} \dots + \mathbb{1}_{\{U_n \leq V\}}$

Loi des grands nombres : pour V fixé, $\frac{S_n}{n}$ CV p.s vers V

$\frac{S_n+1}{n+2}$ CV p.s vers V

$\mathbb{P}(V \leq y \mid X_1 = \varepsilon_1 \dots X_n = \varepsilon_n) \qquad y \in [0,1]$

$$= \frac{\int_0^y x^{S_n}(1-x)^{n-S_n}\,dx}{\int_0^1 x^{S_n}(1-x)^{n-S_n}\,dx} = \int_0^y x^{S_n}(1-x)^{n-S_n}\,dx \;\frac{(n+1)!}{S_n!\,(n-S_n)!}$$

Si on dérive par rapport y, on trouve que la loi conditionnelle de V sachant $(X_1 \dots X_n)$ admet une densité qui est

$$y^{S_n}(1-y)^{n-S_n}\,\frac{(n+1)!}{S_n!\,(n-S_n)!}$$

. L'espérance conditionnelle est l'espérance pour la loi conditionnelle

$$\mathbb{E}(V \mid \mathcal{F}_n) = \int_0^1 y \quad y^{S_n}(1-y)^{n-S_n} \frac{(n+1)!}{S_n!\,(n-S_n)!} = \frac{(S_n+1)!\,(n-S_n)!}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{S_n!\,(n-S_n)!}$$

$$= \frac{S_n+1}{n+2} = M_n$$

donc $M_n = \mathbb{E}(V \mid \mathcal{F}_n)$, M_n martingale fermée

Remarque : On peut généraliser l'urne de Pólya : par exemple quand on tire une boule rouge, on ajoute a boules rouges, b boules noires et quand on tire une boule noire, on ajoute c boules rouges et d boules noires. En général on peut trouver une suite (c_n) telle que $c_n R_n$ martingale ≥ 0 [R_n = nombre de boules rouges]. La martingale converge p.s vers M_∞. La loi de M_∞ n'est pas uniforme en général

---

marches aléatoires et martingales exponentielles

. $X_1, X_2, \ldots X_n \ldots$ iid à valeurs dans $\mathbb{R}$, L^1

$\mathbb{E}(X_1) = m$ $\qquad\qquad Y_n = X_n - m$

$S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ martingale

. On suppose qu'il existe $t > 0$ $\mathbb{E}(e^{tY}) < \infty$ [vrai si Y_1 bornée]

pour $s \in [0,t]$, $M_n(s) = \dfrac{e^{sS_n}}{\mathbb{E}(e^{sY_1})^n}$

Alors $M_n(s)$ est une martingale / filtration $(\mathcal{F}_n)$ où $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1 \cdots Y_n)$

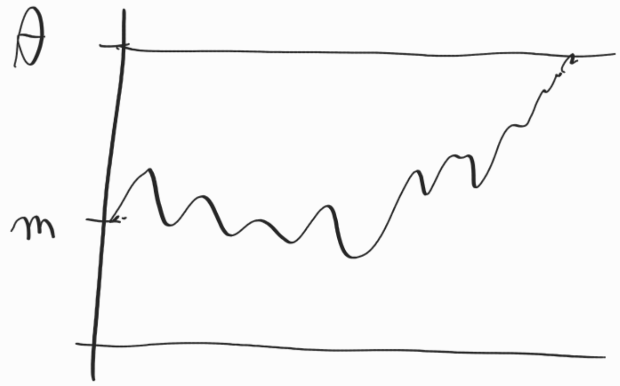
$$\mathbb{E}(e^{sS_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(e^{s(S_n+Y_{n+1})} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(e^{sS_n} e^{sY_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n)$$

$$e^{\theta S_n} \, \mathbb{E}\left(e^{\theta Y_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n\right) = e^{\theta S_n} \frac{\mathbb{E}\left(e^{\theta Y_{n+1}}\right)}{\mathbb{E}\left(e^{\theta Y_1}\right)}$$

Application : $S_n = m + Y_1 + \dots + Y_n$ avec $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = -1) = \frac{1}{2}$

$$\mathbb{E}\left(e^{\theta Y_1}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right) = \cosh(\theta)$$

on prend m entier > 0



$$T = T_0 = \inf\{n, \ S_n = 0\}$$

$\left(M(\theta)_{T\wedge n}\right)$ martingale

$$M(\theta)_{T\wedge n} = \frac{\mathbb{E}\left(e^{\theta S_{T\wedge n}}\right)}{\cosh(\theta)^{T\wedge n}}$$

si $A > m$, $T_A = \inf\{n, \ S_n \in [0, A]\}$ fini p.s.

$$M(\theta)_{T_A\wedge n} \text{ martingale } = \frac{\mathbb{E}\left(e^{\theta S_{T_A\wedge n}}\right)}{\underbrace{\cosh(\theta)^{T_A\wedge n}}_{\geq 1}} \quad \text{bornée}$$

on peut prendre $\theta < 0$

$$M(\theta)_{T_A\wedge n} \text{ CV p.s vers } \underbrace{\frac{\mathbb{E}\left(e^{\theta S_{T_A}}\right)}{\cosh(\theta)^{T_A}}}_{\to \frac{1}{\cosh(\theta)^{T_A}}} = \frac{\overbrace{e^{\theta A}}^{\to 0} \, \overbrace{\mathbb{P}(S_{T_A} = A)}^{\to 0} + 1 \cdot \overbrace{\mathbb{P}(S_{T_A} = 0)}^{\to 1}}{\cosh(\theta)^{T_A}}$$

$A \to \infty$

au temps 0 la martingale vaut $e^{\theta m} = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\cosh(\theta)^{T}}\right)$

$$v = \frac{1}{\cosh(\theta)} \qquad \mathbb{E}\left(v^{T}\right) = f(v)^{m}$$

où f est la fonction telle que

oi $\quad \psi = \dfrac{1}{e^{s}+e^{-s}}$, $f(v) = \dfrac{e^{s}}{x}$

$$v = \frac{1}{x+\frac{1}{x}} \qquad f(v) = x = \frac{1-\sqrt{1-4v^2}}{2v}$$

$v\left(x+\frac{1}{x}\right) = 1$, $vx^2+v = x$, $vx^2 - x + v = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4v^2}}{2v}$$