6 avril : algèbre
7 avril : probabilités

---

exercices : feuille TD 4, exercice 6 : erreur
$(\mathcal{G}_n)$ n'est pas une filtration
Le théorème de De Finetti se démontre avec les martingales rétrogrades

---

Martingales bornées dans L^p, $p > 1$

Lemme : (X_n) sous-martingale, S, T temps d'arrêt bornés, tels que $S \leq T$. Alors $\mathbb{E}(X_S) \leq \mathbb{E}(X_T)$

dem (H_n) prévisible défini par $H_n = \mathbb{1}_{\{S < n \leq T\}} = \underbrace{\mathbb{1}_{\{S \leq n-1\}}}_{\text{mesurable}/\mathcal{F}_{n-1}} - \underbrace{\mathbb{1}_{\{T \leq n-1\}}}$

S, T bornés : $\exists N$ tq ps. $S \leq T \leq N$

$(H.X)$ sous martingale $\rightarrow \mathbb{E}(H.X)_N \geq \mathbb{E}(H.X)_0 = 0$

$(H.X)_N = X_T - X_S$

$\mathbb{E}(H.X_N) = \mathbb{E}(X_T) - \mathbb{E}(X_S) \geq 0$

Th : (Inégalité maximale) (X_n) sous-martingale. Si $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$a \, \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq k \leq n} X_k \geq a\right) \leq \mathbb{E}\left(X_n \mathbb{1}_{\{\sup_{0 \leq k \leq n} X_k \geq a\}}\right) \leq \mathbb{E}(X_n^+)$$

[Inégalité de Markov : $a \, \mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}(X)$]

dem $T = \inf\{n \geq 0,\ X_n \geq a\}$ temps d'arrêt.

$A = \{\sup_{0\leq k\leq n} X_k \geq a\} = \{T \leq n\}$

$\underbrace{T\wedge n}_{\text{temps d'arrêt}} \leq n \overset{\text{lemme}}{\Rightarrow} \mathbb{E}(X_{T\wedge n}) \leq \mathbb{E}(X_n)$

$$X_{T\wedge n} \geq X_n \mathbb{1}_{A^c} + a\mathbb{1}_A \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{A^c}) + a\,\mathbb{P}(T\leq n) \leq \mathbb{E}(X_n)$$

$$a\,\mathbb{P}(\sup_{0\leq k\leq n} X_k \geq a) \leq \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\sup_{n\leq k\leq n} X_k \geq a}) \leq \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{X_n \geq 0}) = \mathbb{E}(X_n^+)$$

Prop : (i) $p > 1$, X_n sous-martingale ≥ 0. On pose $\tilde{X}_n = \sup_{0\leq k\leq n} X_k$

Alors $\forall n \geq 0$ $\mathbb{E}(\tilde{X}_n^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(X_n^p)$

(ii) Si (Y_n) martingale, $Y_n^* = \sup_{0\leq k\leq n} |Y_k|$, $\forall n \geq 0$

$$\mathbb{E}\left[(Y_n^*)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) \mathbb{E}(|Y_n|^p)$$

dem (i) $\Rightarrow$ (ii) on remarque $x \mapsto |x|$ fonction convexe donc $(|Y_n|)$ sous-martingale

on suppose que $E(X_n^p) < \infty$

inégalité de Jensen pour l'espérance conditionnelle $(x \mapsto x^p)$

$$\mathbb{E}(X_k^p) \leq \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_k)^p\right) \leq \mathbb{E}\left(E(X_n)^p|\mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}(X_n^p)$$

$$a^{p-2}\, a\, \mathbb{P}(\tilde{X}_n \geq a) \leq \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{(\tilde{X}_n \geq a)})\, a^{p-2}$$

$$\int_0^\infty a^{p-1}\, \mathbb{P}(\tilde{X}_n \geq a)\, da = \mathbb{E}\left(\int_0^{\tilde{X}_n} a^{p-1}\, da\right) = \frac{1}{p}\mathbb{E}(\tilde{X}_n^p)$$

$$\int_0^\infty a^{p-2}\, \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{(\tilde{X}_n \geq a)})\, da = \mathbb{E}\left(X_n \int_0^{\tilde{X}_n} a^{p-2}\, da\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(X_n \frac{\tilde{X}_n^{p-1}}{p-1}\right)$$

Inégalité de Hölder

$$\mathbb{E}\left(X_n \frac{\tilde{X}_n^{p-1}}{p-1}\right) \leq \frac{1}{p-1} \left(\mathbb{E}(X_n^p)\right)^{1/p} \left(\mathbb{E}(\tilde{X}_n^p)\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\frac{1}{p} \mathbb{E}(\tilde{X}_n^p) \leq \frac{1}{p-1} \left(\mathbb{E}(\tilde{X}_n^p)\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\mathbb{E}(X_n^p)\right)^{1/p}$$

<u>Th</u> On note $X_\infty^* = \sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n|$

Soit (X_n) une martingale. On suppose $\exists p > 1$ tel que $\sup \mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$

Alors X_n converge ps vers X_∞ variable aléatoire telle que

$$\mathbb{E}(|X_\infty|^p) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\mathbb{E}|X_n|^p\right)$$

et $$\mathbb{E}\left((X_\infty^*)^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|X_\infty|^p)$$

<u>dem</u>. (X_n) bornée dans $L^p \Rightarrow$ bornée dans $L^1 \Rightarrow$ CV p.s

. $$\mathbb{E}(\tilde{X}_n^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{k \leq n} \mathbb{E}(|X_k|^p)$$

$n \to \infty$ $$\mathbb{E}(|X_\infty^*|^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$$

donc $(X_\infty^*) \in L^p$ et les $|X_n|$ sont dominées par $(X_\infty^*) \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^p} X_\infty$

$$\mathbb{E}(|X_\infty|^p) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(|X_n|^p) = \sup \mathbb{E}(|X_n|^p)$$

Uniforme intégrabilité

déf : Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires dans L^1.

$(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable si

$$\lim_{a\to\infty}\left(\sup_{i\in I} \mathbb{E}(|X_i| \mathbb{1}_{\{|X_i|>a\}})\right) = 0$$

remarques : on notera u.i.

- u.i $\Rightarrow$ borné dans L^1 : $\exists a$ tq $\sup_{i\in I} \mathbb{E}(|X_i| \mathbb{1}_{\{|X_i|>a\}}) \leq 1$

$$\mathbb{E}|X_i| \leq \mathbb{E}(|X_i| \mathbb{1}_{|X_i|\leq a}) + \mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|>a}) \leq a+1$$

- si I ensemble fini, $(X_i)_{i\in I}$ u.i
- Si $Z\geq 0$, $Z\in L^1$, si $\forall i$, $|X_i|< Z$, alors $(X_i)_{i\in I}$ u.i

$$\mathbb{E}(|X_i| \mathbb{1}_{|X_i|>a}) \leq \mathbb{E}(Z \mathbb{1}_{Z>a})$$

- soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tq $\frac{\varphi(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$ et soit $C>0$

alors $\{X\in L^1, \mathbb{E}|\phi(X)| \leq C\}$ u.i [en particulier, $\varphi(x) = x^p$, $p>1$ les familles de variables aléatoires bornées dans L^p sont u.i]

$$\mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{|X|>a}) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)) \sup_{x>a}\left(\frac{x}{\varphi(x)}\right)$$

- contre exemple : (X_n) v.a uniforme sur $[n, n+1]$

<u>Prop</u> $(X_i)_{i\in I}$ variables aléatoires bornées dans L^1. On a l'équivalence

(i) $(X_i)_{i\in I}$ U.i

(ii) $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, $\forall A\in\mathcal{F}$ tel que $P(A)<\delta$, on a $\forall i\in I$

$$\mathbb{E}(X_i \mathbb{1}_A) < \varepsilon$$

<u>dém</u> : (i) $\Rightarrow$ (ii) soit $\varepsilon>0$, il existe a tel que

$$\sup_{i\in I} \mathbb{E}(|X_i| \mathbb{1}_{|X_i|>a}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

prenons $\delta = \frac{\varepsilon}{2a}$. Si $P(A)<\delta$, alors $\forall i$

$$\mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_A) = \underbrace{\mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_{A\cap\{|X_i|>a\}})}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_{A\cap\{|X_i|\leq a\}})}_{\leq a P(A) \leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) soit $C = \sup_{i\in I} \mathbb{E}|X_i|$

$$\forall a>0, \quad \forall i\in I, \quad P(|X_i|>a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_i|)}{a} \leq \frac{C}{a}$$

soit $\varepsilon>0$, $\exists\delta$ tel que (ii) est vrai. Alors si a vérifie $\frac{C}{a}<\delta$

$$\forall i\in I \qquad \mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|>a}) < \varepsilon$$

<u>Corollaire</u> : X variable aléatoire $\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$. Alors les variables aléatoires $\mathbb{E}(X\mid\mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ est une sous tribu de $\mathcal{F}$ sont uniformément intégrables

<u>dém</u> : $\{X\}$ U.i $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon$, $\exists\delta>0$, $\forall A\in\mathcal{F}$, $P(A)<\delta$, $\mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_A)\leq\varepsilon$

$$P(\mathbb{E}(X\mid\mathcal{G})>a) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}(\mathbb{E}(X\mid\mathcal{G})) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}(|X|)$$

si $a > \frac{\mathbb{E}|X|}{\delta}$,

$$\mathbb{E}\left(|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \mathbb{1}_{(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})>a)}\right) \le \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(|X| \,|\, \mathcal{G}) \, \mathbb{1}_{(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})>a)}\right)$$

$$\mathbb{E}\left(|X| \, \mathbb{1}_{(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})>a)}\right) < \varepsilon$$

<u>Th</u> (X_n) suite de v.a L^1 telle que $(X_n) \xrightarrow{P} X_\infty$. alors il y a équivalence entre

(i) $X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$

(ii) (X_n) ui

<u>dém</u> : (i) $\Rightarrow$ (ii) (X_n) bornée dans L^1.

soit $\varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n \geq N$, $\mathbb{E}(|X_n - X_N|) < \frac{\varepsilon}{2}$ [suite de Cauchy]

$\{X_0, X_1, \dots, X_N\}$ u.i $\Rightarrow \exists \delta > 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) < \delta \Rightarrow \forall n \leq N$

$$\mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $n > N$, $\mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_A) \leq \underbrace{\mathbb{E}(|X_N| \mathbb{1}_A)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\mathbb{E}(|X_n - X_N| \mathbb{1}_A)}_{\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$

(ii) si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u.i, alors $(X_n - X_m)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ est u.i

$\varepsilon > 0$, $\exists a$, $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{E}\left(|X_n - X_m| \mathbb{1}_{|X_n - X_m| > a}\right) < \varepsilon$

$$\mathbb{E}(|X_n - X_m|) \leq \underbrace{\mathbb{E}\left(|X_n - X_m| \mathbb{1}_{|X_n - X_m| < \varepsilon}\right)}_{< \varepsilon} + \mathbb{E}\left(|X_n - X_m| \mathbb{1}_{\varepsilon \leq |X_n - X_m| \leq a}\right) + \underbrace{\mathbb{E}\left(|X_n - X_m| \mathbb{1}_{|X_n - X_m| > a}\right)}_{< \varepsilon}$$

$$\leq 2\varepsilon + \mathbb{E}\left(|X_n - X_m| \mathbb{1}_{\varepsilon \leq |X_n - X_m| \leq a}\right)$$

$$\leq 2\varepsilon + a\, \mathbb{P}(|X_n - X_m| > \varepsilon)$$

$$\mathbb{P}(|X_n - X_m| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n - X_\infty| > \varepsilon) + \mathbb{P}(|X_m - X_\infty| > \varepsilon)$$

cv en proba $\mathbb{P}(|X_n - X_m| > \varepsilon) < \varepsilon$ si $n, m \geq N$

$\rightarrow$ si $n, m \geq N$, $\mathbb{E}|X_n - X_m| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$

(X_n) suite de Cauchy dans L^1

Application aux martingales : si (X_n) martingale, on a l'équivalence :

(i) X_n converge p.s et dans L^1 vers X_∞

(ii) (X_n) U.I.

(iii) (X_n) martingale fermée : il existe Z v.a L^1 tq $\forall n$,

$$X_n = \mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}_n)$$