Semaine prochaine : cours de probabilités lundi 4 avril et jeudi 7 avril

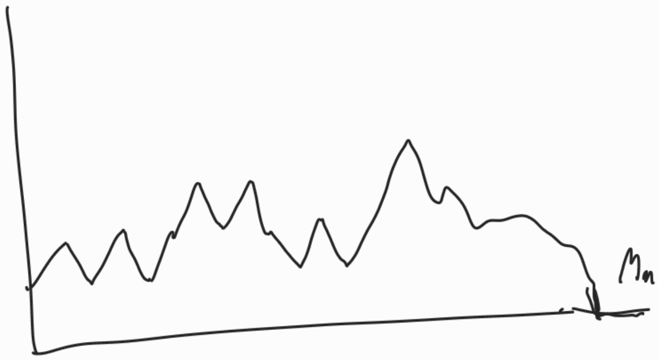
Examen le 17 avril

---

martingale converge dans L^1 $\Leftrightarrow$ uniformément intégrable

expl : martingale bornée ou bornée dans L^p $(p>1)$ $\Rightarrow$ u.i

contre-exemples ① $S_n := 1 + X_1 + \dots + X_n$ où (X_i) v.a. iid, $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$



(S_n) martingale

$T_0 = \inf\{k,\ S_k = 0\}$ temps d'arrêt

$M_n = (S_{T_0 \wedge n})$ martingale ≥ 0

M_n converge p.s vers $M_\infty = 0$ p.s. $\mathbb{E}(M_0) = 1$ $\mathbb{E}(M_\infty) = 0 \neq \mathbb{E}(M_0)$

$\forall n,\ \mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_0) = 1 \not\to \mathbb{E}(M_\infty)$

donc $M_n \not\xrightarrow{L^1} M_\infty$ donc (M_n) n'est pas u.i

② branchement critique : (Z_n) processus de Galton-Watson

$Z_0 = 1$ $Z_{n+1} = X_1^{(n)} + \dots + X_{Z_n}^{(n)}$ où les $(X_i^n)_{(n,i)\in\mathbb{N}^2}$

sont iid, X_i^n = nb d'enfants du $i^{\text{ème}}$ individu à la génération n

$Z_0 = 1$

$Z_1 = 3$

$Z_2 = 5$

$Z_3 = 7$

$m = \mathbb{E}(Z_1)$, alors (Z_n / m^n) est une martingale. Si $m = 1$

et $\mathbb{P}(Z_1=1)\neq 1$, alors Z_n est une martingale positive qui converge presque sûrement vers 0. $Z_n \to 0$ p.s. $\forall n$, $\mathbb{E}(Z_n)=\mathbb{E}(Z_0)=1$

$\to$ pas de convergence dans L^1 $\to$ pas d'uniforme intégrabilité.

<u>Th</u> soit (X_n) une martingale U.I. Alors pour tout temps d'arrêt T (qui peut être infini), $X_T = \mathbb{E}(X_\infty / \mathcal{F}_T)$.

En particulier, $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_\infty) = \mathbb{E}(X_n)$ pour tout n.

Si S et T sont deux temps d'arrêt avec $S\leq T$ p.s, alors

$$X_S = \mathbb{E}(X_T / \mathcal{F}_S)$$

<u>dem</u> on montre d'abord $X_T\in L^1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X_T|) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_{\{T=n\}}) + \mathbb{E}(|X_\infty|\mathbb{1}_{\{T=\infty\}}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\,\mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_{(T=n)}/\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(|X_\infty|\mathbb{1}_{\{T=\infty\}}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(T=n)}\mathbb{E}(|X_\infty|/\mathcal{F}_n)) + \mathbb{E}(|X_\infty|\mathbb{1}_{(T=\infty)}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(T=n)}\mathbb{E}|X_\infty|) + \mathbb{E}(|X_\infty|\mathbb{1}_{(T=\infty)}) \\
&= \mathbb{E}(|X_\infty|)
\end{aligned}$$

Prenons $A\in\mathcal{F}_T$. [notons $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N}\cup\{\infty\}$]

$$\mathbb{E}(X_T\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}\Big(\sum_{n\in\bar{\mathbb{N}}} \mathbb{1}_{(T=n)}\mathbb{1}_A X_T\Big)$$

$X_T\in L^1 \to$ on peut intervertir $\mathbb{E}$ et $\sum_{n\in\bar{\mathbb{N}}}$

$$\mathbb{E}(X_T \mathbb{1}_A) = \sum_{n\in\bar{\mathbb{N}}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T=n\}} \mathbb{1}_A X_T) = \sum_{n\in\bar{\mathbb{N}}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{T=n\}} X_n)$$

$$= \sum_{n\in\bar{\mathbb{N}}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{T=n} \mathbb{E}(X_\infty / \mathcal{F}_n)) = \sum_{n\in\bar{\mathbb{N}}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A\cap\{T=n\}} \mathbb{E}(X_\infty/\mathcal{F}_n))$$

$$= \sum_{n\in\bar{\mathbb{N}}} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\infty \mathbb{1}_{A\cap\{T=n\}} / \mathcal{F}_n))$$

$$= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\infty \mathbb{1}_A / \mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(X_\infty \mathbb{1}_A)$$

égalité vraie pour tous les $A \in \mathcal{F}_T$ $\rightarrow$ vraie si on remplace $\mathbb{1}_A$ par n'importe quelle variable aléatoire bornée mesurable $/\mathcal{F}_T$ $\rightarrow$ $X_T = \mathbb{E}(X_\infty/\mathcal{F}_T)$

- $S \leq T \Rightarrow \mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$

$$X_S = \mathbb{E}(X_\infty / \mathcal{F}_S) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\infty/\mathcal{F}_T)/\mathcal{F}_S) = \mathbb{E}(X_T / \mathcal{F}_S)$$

Martingales rétrogrades

on dit aussi martingales inverses (en anglais, "inverse martingale"
"backward martingale")

passé présent futur

$\longrightarrow$ sens direct

$\longleftarrow$ sens rétrograde

déf : $(\mathcal{F}_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ est une filtration rétrograde si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n$ est une tribu et si $\forall m, n \in -\mathbb{N}$, $n \leq m \Rightarrow \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m$

déf : $(M_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ est une martingale rétrograde si $\forall n \in -\mathbb{N}, \mathbb{E}(|M_n|) < \infty$ et si $\forall m, n \in -\mathbb{N}$, $n \leq m \Rightarrow X_n = \mathbb{E}(X_m / \mathcal{F}_n)$

[on peut aussi définir des sous-martingales et des surmartingales rétrogrades]

Th $(M_n)_{n \in -\mathbb{N}}$ martingale rétrograde.

Alors (M_n) est uniformément intégrable et converge p.s et dans L^1 vers $M_{-\infty}$. Pour tout n $\mathbb{E}(X_n / \mathcal{F}_{-\infty}) = X_{-\infty}$

$$\left(\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n \in -\mathbb{N}} \mathcal{F}_n \right)$$

dém 1. rappel : pour les martingales ≥ 0, on montre la cv p.s en montrant que p.s, $\forall (p<q)$ rationnels, on traverse $[p,q]$ un nombre fini de fois. On utilise une inégalité sur le nombre de montées.

Dans les notes de cours, on a montré qu'on a un nombre fini de montées dans le cas borné dans L^2. Dans le cours de Le Gall, la démonstration est faite dans le cas des martingales ≥ 0 (inégalité de Doob)

. Pour les martingales rétrogrades, on utilise les mêmes arguments.

→ on démontre ainsi la convergence p.s

. Il reste à montrer l'uniforme intégrabilité.

$\forall n$, $X_n = \mathbb{E}(X_0 / \mathcal{F}_n)$

On a vu que si $X \in L^1$, la famille $\left(\mathbb{E}(X / \mathcal{G})\right)_{\mathcal{G} \subset \mathcal{F}}$ indexée par les sous-tribus de $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable.

Th (Loi des grands nombres, version L^1)

$X_1 \ldots X_n \ldots$ v.a iid, $\in L^1$, on pose $m = \mathbb{E}(X_1)$

Alors $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[L^1]{p.s} m$

dém : lemme : soit Z v.a dans L^1, H_1, H_2 sous-tribus, H_2 indép de $\sigma(\sigma(Z), H_1)$. Alors $\mathbb{E}(Z \mid \sigma(H_1, H_2)) = \mathbb{E}(Z \mid \sigma(H_1))$

dém du lemme : soit $A \in \sigma(H_1, H_2)$, on regarde

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A Z)$$

on commence par prendre A de la forme $B \cap C$, $B \in H_1$, $C \in H_2$

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A Z) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathbb{1}_C Z) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathbb{1}_C \mathbb{E}(Z \mid H_1)).$$

dém loi des grands nombres : soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$

$\mathbb{E}(X_1 \mid S_n) = \mathbb{E}(X_k \mid S_n)$ pour tout $k \in \{1, 2 .. n\}$ car les X_i sont iid et S_n invariante par permutation : $S_n = X_{\sigma(1)} + X_{\sigma(2)} \dots + X_{\sigma(n)}$ pour toute permutation σ de $\{1, 2 .. n\}$

$$n\, \mathbb{E}(X_1 \mid S_n) = \mathbb{E}(X_1 \mid S_n) + \mathbb{E}(X_2 \mid S_n) \dots + \mathbb{E}(X_n \mid S_n)$$
$$= \mathbb{E}(S_n \mid S_n) = S_n$$

$$\mathbb{E}(X_1 \mid S_n) = \frac{S_n}{n}$$

soit $H_1 = \sigma(S_n)$, $H_2 = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2} \dots)$

Alors $$\mathbb{E}(X_1 \mid S_n, X_{n+1}, X_{n+2} \dots) = \frac{S_n}{n} \quad (*) \quad (\text{lemme})$$

$$\mathcal{F}_{-n} = \sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2} \dots)$$

$M_{-n} = \frac{S_n}{n}$ $\rightsquigarrow$ d'après $(*)$ (M_{-n}) est une martingale rétrograde

donc elle converge p.s et dans L^1 vers $M_{-\infty}$

Soit $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{-n}$. D'après la loi du 0-1 de Kolmogorov,

$\mathcal{F}_\infty = \{\emptyset, \Omega\}$ et M_∞ mesurable $/ \mathcal{F}_\infty \to M_\infty$ constante p.s.

$M_{-n} \xrightarrow{L^1} M_\infty$, $\mathbb{E}(M_{-n}) = \mathbb{E}(M_\infty) = M_\infty = m$

. Autres applications : variables aléatoires échangeables (invariance par permutation)

Théorème de De Finetti. Loi du 0-1 de Hewitt-Savage

<u>Hewitt-Savage</u> : $X_1, X_2 \ldots X_n \ldots$ v.a. iid sur $(E, \mathcal{E})$

F fonction symétrique sur $E^{\mathbb{N}^*}$: $\forall \sigma$ permutation de $\mathbb{N}^*$ ayant un support fini (nbre fini d'entiers n tels que $\sigma(n) \neq n$).

Alors $F(X_1, \ldots X_n, \ldots)$ est constante p.s.

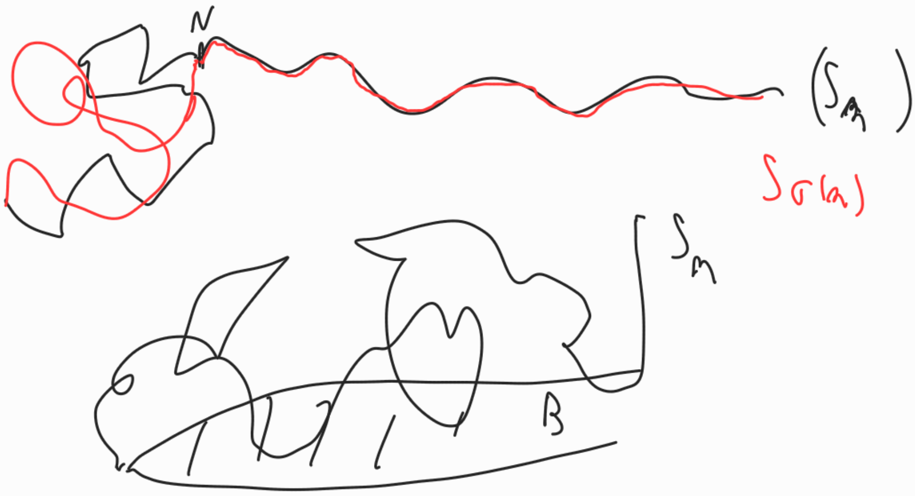
<u>exple</u> : $X_1 \ldots X_n$ iid à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

$S_n = X_1 \ldots + X_n$. B borélien

$\mathbb{1}_{(\text{card}\{n,\ S_n \in B\} = \infty)} = F(X_1, \ldots X_n \ldots)$

F symétrique : si σ permutation de $\mathbb{N}^*$ à support fini, $\exists N$, $\forall n \geq N$,

$\sigma(n) = n \Rightarrow S_n = S_{\sigma(n)}$ si $n \geq N$



dém : on suppose F bornée. $\forall n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1 \dots X_n)$, $\mathcal{G}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2} \dots)$

on pose $Y = F(X_1, X_2 \dots)$

$$U_n = \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n) \quad , \quad Z_n = \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}_n)$$

D'après des résultats déjà vus,

$$U_n \xrightarrow[L^1]{ps} \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_\infty) = Y$$

$$Z_n \xrightarrow[L^1]{ps} \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}_\infty) = \mathbb{E}(Y)$$

[$\mathcal{G}_\infty$ est triviale par la loi du 0-1 de Kolmogorov]

$\to$ pour n assez grand, $\mathbb{E}(|U_n - Y|) < \varepsilon$

$\mathbb{E}(|Z_n - Y|) < \varepsilon$

U_n mesurable / $\mathcal{F}_n$ $\Rightarrow \exists g : E^n \to \mathbb{R}$, $U_n = g(X_1 \dots X_n)$

$$\mathbb{E}(|F(X_1 \dots X_n, \dots) - g(X_1 \dots X_n)|) < \varepsilon$$

inv par permutation

$$\mathbb{E}(|F(X_{n+1} \dots X_{2n}, X_1 \dots X_n, X_{2n+1}, X_{2n+2} \dots) - g(X_1 \dots X_n)|) < \varepsilon$$

(X_i) iid

$$\mathbb{E}(|F(X_{n+1}, \dots X_{2n}, X_1 \dots X_n, X_{2n+1} \dots) - g(X_{n+1} \dots X_{2n})|) < \varepsilon$$

$$\mathbb{E}(|Y - g(X_{n+1} \dots X_{2n})|) < \varepsilon$$

$$\mathbb{E}(|\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}_n) - \mathbb{E}(g(X_{n+1} \dots X_{2n}) \mid \mathcal{G}_n)|) < \varepsilon$$

$$\mathbb{E}(|Z_n - \mathbb{E}(g(X_{n+1} \dots X_{2n}))|) < \varepsilon$$

$$\mathbb{E}(|Y - \mathbb{E}(Y)|) \leq 3\varepsilon \qquad \text{vrai } \forall \varepsilon > 0$$

$\rightarrow$ p.0, $\quad Y = \mathbb{E}(Y)$

$\rightarrow$ p.0 $\quad F(\cancel{X_1}, X_2 \dots X_n \dots)$ constante