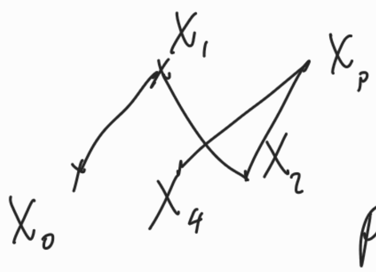
Cours jeudi 7 avril

Chaînes de Markov (Le Gall, chapitre 13)

Idée : on se déplace sur un espace E : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processus à valeurs dans E. Au temps n, on choisit au hasard le prochain point qu'on va visiter en fonction de



l'endroit où on est au temps n mais pas en fonction de $X_0, X_1, \dots X_{n-1}$.

. L'ensemble des temps est discret : $n \in \mathbb{N}$. On peut considérer des chaînes de Markov à temps continu : $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Pas dans ce cours

. L'espace d'états E peut être fini, infini dénombrable, (par exemple $\mathbb{Z}^d$), infini non dénombrable (par exemple $\mathbb{R}^d$).

Dans ce cours, E est fini ou infini dénombrable. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E$, $\mathbb{P}(X_n = x) = p_n(x) \geq 0$, $\sum_{x\in E} p_n(x) = 1$

Soit E ensemble dénombrable, tribu $= \mathcal{P}(E)$

déf : une matrice stochastique sur E est une famille Q indexée par $E\times E$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que pour tout $x \in E$,

$$\sum_{y\in E} Q(x,y) = 1$$

Dans le cours sur l'espérance conditionnelle, on avait défini la notion de probabilité de transition : E, F espaces mesurables, $\nu : E \times F \to [0,1]$

(i) $\forall x$, $\nu(x,\cdot)$ mesure de proba sur F

(ii) $\forall A$ ensemble mesurable de F, $x \mapsto \nu(x,A)$ est mesurable.

Dans le cas particulier $E = F$ dénombrable, ces notions sont les mêmes

. Q donnée, $\nu(x,\cdot)$ est la proba sur E donnée par $\nu(x,A) = \sum_{y \in A} Q(x,y)$

. ν donnée, $Q(x,y) = \nu(x,\{y\})$

<u>déf</u> : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur E de matrice de transition Q si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = z \mid X_n = y) = Q(x,y)$

et $\forall x_0, x_1 \dots x_{n-1} \in E$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = z \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1 \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = y) = Q(x,y)$$

<u>Remarque</u> : Si E est fini, $|E| = n$, une matrice stochastique sur E est une matrice $n \times n$, à coefficients dans $[0,1]$, et telle que $\sum_y Q(x,y) = 1 \quad \forall x \in E$

On a alors $Q^{n+1}(x,z) = \sum_{y\in E} Q^n(x,y)\, Q(y,z)$. D'après la définition d'une chaîne de Markov, si (X_n) est une chaîne de Markov de matrice Q, $\mathbb{P}(X_n = y \mid X_0 = x) = Q^n(x,y)$.

Par récurrence sur n : vrai pour $n=0$, $n=1$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_0 = x) = \sum_{y_1, y_2 \dots y_n} \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_0 = x, X_1 = y_1, \dots X_n = y_n) \times \mathbb{P}(X_0 = x, X_1 = y \dots X_n = y_n)$$

$$= \sum_{y_1 \dots y_n} \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = y_n)}_{Q(y_n, y)} \times \mathbb{P}(X_0 = x \dots X_n = y_n)$$

$$= \sum_{y_n} Q(y_n,y)\, Q^n(y_0,y_n) = Q^{n+1}(y_0,y)$$

• si E infini dénombrable, on peut définir par récurrence $Q_1 = Q$

$$Q_{n+1}(x,y) = \sum_{y'} Q_n(x,y')\, Q(y',y)$$ et on a de même

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_0 = x) = Q_{n+1}(x,y)$$

__exemples__ : • marche aléatoire : si $X_1, \dots X_n \dots$ iid à valeurs dans $\mathbb{Z}$,

$S_0 = 0$, $S_1 = X_1$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{Z}$

• $\mathbb{P}(S_{n+1} = y \mid S_0 = 0, S_1 = x_1, \dots S_n = x_n) = \mathbb{P}(S_{n+1} - S_n = y - x_n \mid S_0 = 0 \dots S_n = x_n)$

$= \mathbb{P}(X_{n+1} = y - x_n \mid S_0 = 0 \dots S_n = x_n)$

$= \mathbb{P}(X_{n+1} = y - x_n \mid S_n = x_n)$

plus généralement (X_n) iid à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $S_n = X_1 + \dots + X_n \to (S_n)$ chaîne de Markov

si (X_n) iid à valeurs dans un groupe G (pas forcément commutatif) dénombrable

$S_n = X_1 X_2 \dots X_n \to (S_n)$ chaîne de Markov

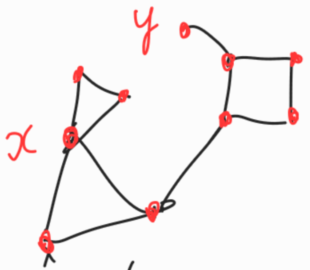
$$\mathbb{P}(S_{n+1} = y \mid S_n = x) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y x^{-1} \mid S_n = x) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y x^{-1})$$

• marche aléatoire sur un graphe $G = (S, A)$: S ensemble des sommets du graphe, A ensemble des arêtes

degré$(y) = 1$

(G dénombrable)

degré$(x) = 4$



S

A

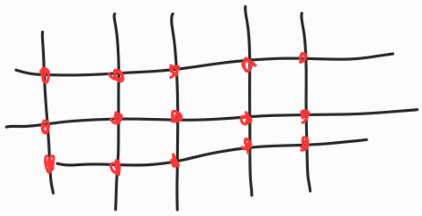
on prend la matrice de transition Q définie par

$$Q(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si pas d'arête entre } x, y \\ \dfrac{1}{\text{degré}(x)} & \text{si arête entre } x \text{ et } y \end{cases}$$

degré de x = nombre d'arêtes incidentes à x

remarque : marche aléatoire dans le graphe $\mathbb{Z}^2$ = marche aléatoire avec

$$\mathbb{P}(X_1=(1,0)) = \mathbb{P}(X_1=(0,1)) = \mathbb{P}(X_1=(0,-1)) = \mathbb{P}(X_1=(-1,0))$$



. Processus de Galton-Watson : $Z_0=1$, $Z_{n+1} = X_1^{(n+1)} + X_2^{(n+1)} + \dots + X_{Z_n}^{(n+1)}$

$Z_0=1$

$Z_1=2$

$Z_3=3$

$Z_4=5$

On vérifie que (Z_n) est une chaîne de Markov

$$\mathbb{P}(Z_{n+1}=y \mid Z_0=1, Z_1=x_1, \dots, Z_n=x_n) = \mathbb{P}(Z_{n+1}=y \mid Z_n=x_n)$$
$$= \mathbb{P}(X_1^{(n+1)}+\dots+X_{x_n}^{(n+1)}=y)$$

contre-exemple : (X_n) iid, $\mathbb{P}(X_1=1)=\mathbb{P}(X_1=-1)=\frac{1}{2}$

$$Y_0=0,\quad Y_1=X_1,\quad Y_{n+1} = Y_n + X_n \mathbb{1}_{(Y_n>Y_{n-1})} + 2X_n\mathbb{1}_{(Y_n<Y_{n-1})}$$

(Y_n) n'est pas une chaîne de Markov

La loi de Y_{n+1} conditionnellement à Y_n a un support de cardinal 4 :

$$Y_{n+1}\in\{Y_n+1, Y_n+2, Y_n-1, Y_n-2\}$$

La loi de Y_{n+1} conditionnellement à Y_n, Y_{n-1} a un support de cardinal 2 : si $Y_n>Y_{n-1}$

$$Y_{n+1}\in\{Y_n+1, Y_n-1\}$$

si $Y_n<Y_{n-1}$, $Y_{n+1}\in\{Y_n+2, Y_n-2\}$

remarque : (Y_n) martingale / $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1 \dots X_n)$

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1} \mathbb{1}_{\{Y_n > Y_{n-1}\}} + 2 X_{n+1} \mathbb{1}_{\{Y_n < Y_{n-1}\}} | \mathcal{F}_n) + Y_n$$

$$= Y_n + \mathbb{1}_{(Y_n > Y_{n-1})} \underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)}_{0} + \mathbb{1}_{\{Y_n < Y_{n-1}\}} \underbrace{2\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)}_{0}$$

$$= Y_n + 0 = Y_n$$

Prop : E dénombrable, Q matrice stochastique sur E. Alors il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tel que $\forall x \in E$, on peut définir un processus $(X_n^x)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est une chaîne de Markov de matrice de transition Q avec $X_0 = x$.

dém : . idée : à partir d'une variable aléatoire $Y \sim$ uniforme $[0,1]$, on peut construire une famille i.i.d de v.a $\sim$ uniforme $[0,1]$, $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir de $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on construit $(X_n^x)_{n \in \mathbb{N}}$

① $Y \sim$ unif $[0,1]$, $Y = \sum_{i \geq 1} \frac{3_i}{2^i}$ $\quad 3_i \in \{0,1\}$ $\quad 3_i$ iid

$\mathbb{P}(3_i = 0) = \mathbb{P}(3_i = 1) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable $\Rightarrow$ il existe φ bijection $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

on pose $Y_i := \sum_{n \geq 1} \frac{3_{\varphi^{-1}(n,i)}}{2^i}$ $\rightarrow$ $\forall i$ $Y_i \sim$ unif $[0,1]$, Y_i indépendantes

② on construit $(X_n^x)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir de (Y_n). E dénombrable $\to$ on se ramène à $E = \mathbb{N}$

conditionnellement à $X_n = y$, on définit : $X_{n+1} = 3$ où

$$\sum_{3' < 3} Q(y, 3') \leq Y_{n+1} \leq \sum_{3' \leq 3} Q(y, 3')$$

- $\mathbb{P}(X_{n+1}=z) = \sum_{z' \leq z} Q(y,z') - \sum_{z'<z} Q(y,z') = Q(y,z)$

$$= \mathbb{P}\left(Y_{n+1} \in \left[\sum_{z'<z}, \sum_{z'\leq z}\right]\right)$$

- $\{X_{n+1}=z\} = \{Y_{n+1} \in [\sum_{z'<z}, \sum_{z'\leq z}]\}$

les variables aléatoires (Y_n) sont indépendantes

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=z \mid X_0=x, X_1=x_1, \dots X_n=x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1}=z \mid X_n=x)$$

Théorème : (i) E dénombrable, Q matrice stochastique sur E. Alors $\forall x \in E$, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}_x$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$ telle que sous $\mathbb{P}_x$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une chaîne de Markov de matrice de transition Q et telle que $\mathbb{P}(X_0=x)=1$

(ii) Si μ est une loi de probabilité sur E, alors il existe une unique loi de probabilités $\mathbb{P}_\mu$ sur $E^{\mathbb{N}}$ tq sous $\mathbb{P}_\mu$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une chaîne de Markov de matrice de transition Q et telle que $\forall x \in E$

$\mathbb{P}(X_0=x) = \mu(x)$

dém : (i) existence : proposition

unicité : la loi de $\mathbb{P}_x$ est déterminée par sa valeur sur les événements cylindriques A. $[A = \{X_0=x, X_1=x_1, \dots X_n=x_n\}]$

[les événements cylindriques engendrent la tribu par le lemme des classes monotones]

(ii) $\mathbb{P}_\mu = \sum_{x\in E} \mu(x)\, \mathbb{P}_x$

opérateur de translation : $k \in \mathbb{N}$, $\theta_k : E^{\mathbb{N}} \longrightarrow E^{\mathbb{N}}$

$$(\omega_0, \omega_1, \dots \omega_n \dots) \longmapsto (\omega_k, \omega_{k+1} \dots \omega_{k+n} \dots)$$

Théorème (Propriété de Markov simple)

F, G fonctions mesurables positives sur $E^{\mathbb{N}}$. On suppose F mesurable / $\mathcal{F}_n$ où $\mathcal{F}_n$ est la tribu engendrée par la fonction $(\omega_0 \dots \omega_n, \omega_{n+1} \dots) \longmapsto (\omega_0, \dots \omega_n)$

Alors $\forall x \in E$, $\mathbb{E}_x(F \cdot G \circ \theta_n) = \mathbb{E}_x[F \, \mathbb{E}_{X_n}(G)]$

$$\mathbb{E}_x(G \circ \theta_n \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_{X_n}(G)$$

dem : on peut prendre $F = \mathbb{1}_{(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)}$

si G est de la même forme ; $G = \mathbb{1}_{(X_0 = y_0 \dots X_p = y_p)}$ $(*)$

alors $\forall y \in G$, $\mathbb{E}_y(G) = \mathbb{1}_{(y_0 = y)} Q(y_0, y_1) Q(y_1, y_2) \dots Q(y_{p-1}, y_p)$

$$\mathbb{E}_x(F \cdot G \circ \theta_n) = P_x(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots X_n = x_n, X_n = y_0, \dots X_{n+p} = y_p)$$
$$= \mathbb{1}_{(x_0 = x)} Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{n-1}, x_n) \mathbb{1}_{(x_n = y_0)} Q(y_0, y_1) \dots Q(y_{p-1}, y_p)$$

→ formule vérifiée pour G de la forme $(*)$

→ vrai pour toute fonction G (arguments de classe monotone)

Propriété de Markov forte

Th : T temps d'arrêt. F, G fonctions ≥ 0, mesurables. On suppose que F est mesurable / $\mathcal{F}_T$. Alors, $\forall x \in E$

$$\mathbb{E}_x(\mathbb{1}_{(T<\infty)} F \cdot G \circ \theta_T) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(T<\infty)} F \, \mathbb{E}_{X_T}(G))$$

$$\mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{(T<\infty)}\, G\circ\theta_T \mid \mathcal{F}_T\right) = \mathbb{1}_{(T<\infty)}\, \mathbb{E}_{X_T}(G)$$

<u>dém</u> $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{(T=n)} F \cdot G\circ\theta_T\right) = \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{(T=n)} F \cdot G\circ\theta_n\right) = \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{(T=n)} F\, \mathbb{E}_{X_n}(G)\right)$$

(propriété de Markov simple appliquée avec la fonction $F' = \mathbb{1}_{(T=n)} F$ qui est $\mathcal{F}_n$-mesurable puisque F est $\mathcal{F}_T$-mesurable)

On fait la somme sur $n \in \mathbb{N}$