. Livre de Rick Durrett : Probability : Theory and examples
(en anglais) sur internet

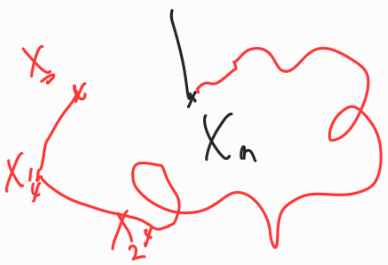
. Livre de Baldi, Mazliak, Priouret : Martingales et chaînes de Markov

---

Chaîne de Markov (X_n) sur E dénombrable

sa

Loi de X_{n+1} sachant X_n = Loi de X_n sachant $X_0, X_1 \dots X_n$



- $X_0 \dots X_{n-1}$
- X_n

Propriété de Markov simple : G mesurable

$$\mathbb{E}_x(G \circ \theta_n \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_{X_n}(G) \qquad (1)$$

exemple : (Z_n) Galton-Watson, $Z_0 = 1$ $\quad \mathbb{P}(Z_1 = k) = \mu_k$

$\mu_i \geq 0$, $\sum \mu_i = 1$

$E = \mathbb{N}$, $\Omega = E^{\mathbb{N}}$

$G : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\omega_0, \omega_1, \omega_2 \cdots) \longmapsto \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$: population totale sur les 3 premières générations

$n = 2$ dans (1) et $x = 1$

$$\mathbb{E}_1(G \circ \theta_n \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_{X_2}(G)$$

$$\mathbb{E}_1(G \circ \theta_n \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_1(\omega_3 + \omega_4 + \omega_5 \mid \mathcal{F}_2) = \mathbb{E}_{X_2}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, sur l'événement $\{X_2 = k\}$, $\mathbb{E}_{X_2}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = \mathbb{E}_k(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$

$$\mathbb{E}_{X_2}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{(X_2 = k)} \mathbb{E}_k(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$$

Propriété forte de Markov

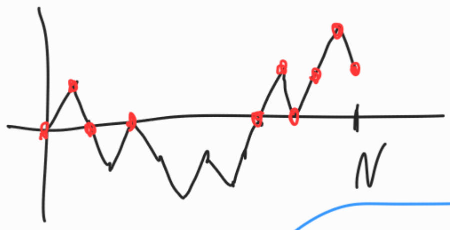
T temps d'arrêt : $\mathbb{E}_x(\mathbb{1}_{(T<\infty)} G \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_T) = \mathbb{E}_{X_T}(G) \, \mathbb{1}_{(T<\infty)} \quad (2)$

S_n : marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$: $S_n = X_1 + \dots + X_n$

où (X_i) iid, $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$; $E = \mathbb{Z}$

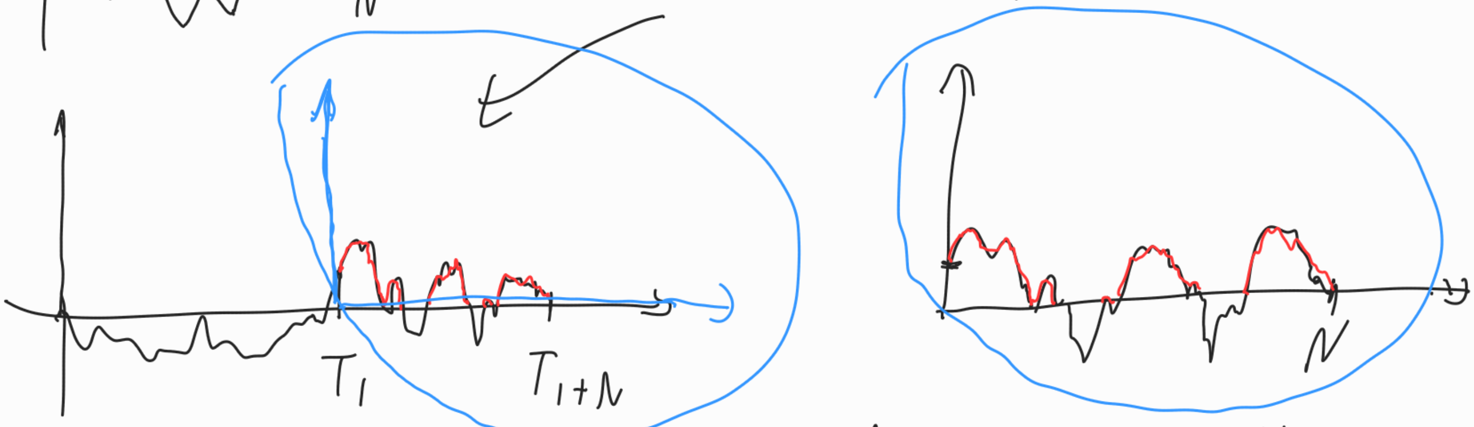
$T = \inf\{n, X_n = 1\}$, $x = 0$ $\qquad$ presque sûrement, $T < \infty$

$G : (\omega_0, \omega_1, \dots \omega_n \dots) \longmapsto \sum_{k=0}^{N} \mathbb{1}_{(\omega_i \geq 0)}$ $\quad$ temps passé ≥ 0 avant l'instant N



$G = 10$

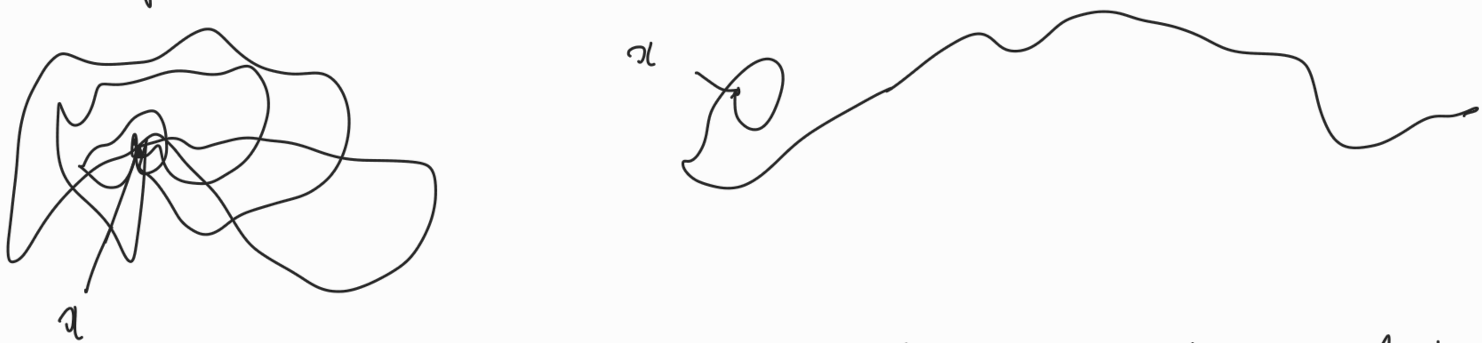
$$\mathbb{E}_0(G \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_T) = \mathbb{E}_1(G)$$



On utilise souvent la propriété forte de Markov avec T temps d'atteinte.

En particulier, si $T = \inf\{n, X_n = x\}$, $\mathbb{E}_y(G \circ \theta_T) = \mathbb{E}_x(G)$

Question naturelle : si E est infini, si on part de x, revient-on une infinité de fois en x ?



$x \in E$, $H_x = \inf\{n \geq 1, X_n = x\}$ ("Hitting time" en anglais)

$$N_x = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{(X_n = x)}$$ nombre de visites de x

Prop : $x \in E$, on a une des deux situations :

- soit $\mathbb{P}_x(H_x < \infty) = 1$ et dans ce cas, $N_x = \infty$ $\mathbb{P}_x$ p.s. $\to$ x récurrent
- soit $\mathbb{P}_x(H_x < \infty) < 1$ et dans ce cas, $N_x < \infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s. $\to$ x transitoire (transient)

dém : On utilise la propriété forte de Markov avec $T = H_x$

si $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_x(N_x \geq k+1) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{(H_x < \infty)} \mathbb{1}_{(N_x \geq k)} \circ \theta_{H_x}\right]$

$= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{(H_x < \infty)} \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{(N_x \geq k)}\right)\right]$

$$= \mathbb{P}_x(H_x < \infty)\, \mathbb{P}_x(N_x \geq k)$$

$\dfrac{\mathbb{P}(N_x \geq k+1)}{\mathbb{P}(N_x \geq k)} = \mathbb{P}_x(H_x < \infty) \leadsto$ si $\mathbb{P}_x(H_x < \infty) = 1$, alors $\forall k$,

$$\mathbb{P}(N_x \geq k) = 1 \rightarrow N_x = \infty \text{ p.s.}$$

si $p = \mathbb{P}_x(H_x < \infty) < 1$, alors N_x suit une loi géométrique :

$$\mathbb{P}(N_x = k) = p^k(1-p)$$

$$\text{et } \mathbb{E}(N_x) < \infty$$

<u>déf</u> : noyau potentiel : $U : E \times E \mapsto \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

$$U(x,y) = \mathbb{E}_x(N_y)$$

<u>Prop</u> : (i) $\forall x,y$, $\quad U(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x,y)$

(ii) x récurrent si et seulement si $U(x,x) = +\infty$

(iii) $\forall x,y$, $x \neq y$, $\quad U(x,y) = U(y,y)\, \mathbb{P}_x(H_y < \infty)$

<u>dém</u> : (i) $U(x,y) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{(X_n = y)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x,y)$

(ii) prop précédente

(iii) propriété forte de Markov avec $T = H_y$

$$\mathbb{E}_x(N_y) = \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{(H_y < \infty)}\, N_y \circ \theta_{H_y}\right) = \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{(H_y < \infty)}\, \mathbb{E}_y(N_y)\right)$$
$$= \mathbb{P}_x(H_y < \infty)\, U(y,y)$$

<u>Exemple fondamental</u> : marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$

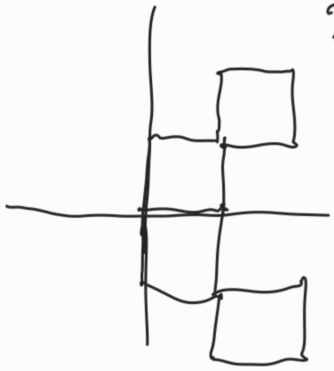
(X_i) iid, à valeurs dans $E = \mathbb{Z}^d$, on a $(2d)$ vecteurs de norme L^1 égale à 1 : $(1,0 \dots 0)$, $(-1,0 \dots 0)$, $(0,1,0 \dots)$ .. soit U_d l'ensemble de ces vecteurs

X_i uniforme dans U_d

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

$Q_n(0,0) = 0$ si n impair

$d=1$: $Q_{2n}(0,0) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}} \overset{\text{Stirling}}{\sim} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2^{2n}\left(\sqrt{2\pi n}\right)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$



$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

$$\sum_n Q_{2n}(0,0) = U(0,0) = +\infty \rightarrow \text{récurrent}$$

$d \geq 2$ avec des arguments combinatoires, on montre qu'en dimension d,

$$Q^{(d)}_{2n}(0,0) \sim \frac{c_d}{n^{d/2}} \quad \text{et} \quad \sum_n Q^{d}_{2n}(0,0) = U(0,0) \begin{cases} = +\infty & \text{si } d \leq 2 \\ < \infty & \text{si } d \geq 3 \end{cases}$$

remarque : si au lieu de prendre U_d, on prend U'_d = vecteurs de norme L^∞ égale à 1, $|U'_d| = \frac{1}{2^d}$ la formule devient

$$Q^{(d)}_{2n}(0,0) = \left(\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}\right)^d \rightarrow \text{on montre aussi} \begin{cases} \text{récurrence en dim } 1 \text{ \& } 2 \\ \text{Transience en dim} \geq 3 \end{cases}$$

---

soit R l'ensemble des points récurrents

<u>Lemme</u> : $x \in R$, $y \in E$, si $U(x,y) > 0$, alors $y \in R$ et $\mathbb{P}_y(H_x < \infty) = 1$ $(\Rightarrow U(y,x) > 0)$

<u>dém</u> : . montrons $\mathbb{P}_y(H_x < \infty) = 1$

$$\underline{\mathbb{P}_x(N_x < \infty) = 0} \geq \mathbb{P}_x(H_y < \infty, H_x \circ \theta_{H_y} = \infty)$$
$$= \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{(H_y<\infty)}\, \mathbb{1}_{(H_x=\infty)} \circ \theta_{H_y}\right)$$
$$= \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{(H_y<\infty)}\, \mathbb{P}_y(H_x = \infty)\right)$$

$= \mathbb{P}_x(H_y < \infty)\, \mathbb{P}_y(H_x = \infty)$

$U(x,y) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(H_y < \infty) > 0 \quad , \mathbb{P}_y(H_x = \infty) = 0$

. si $n_1, n_2 \geq 1 \quad Q_{n_1}(x,y) > 0 \ , \ Q_{n_2}(y,x) > 0$

si $p \geq 0 \quad Q_{n_1+n_2+p}(y,y) \geq Q_{n_2}(y,x)\, Q_p(x,x)\, Q_{n_1}(x,y)$

$\sum_m Q_m(y,y) \geq \underbrace{\sum_p Q_{n_1+n_2+p}(y,y)}\ \geq \sum_p \quad = Q_{n_2}(y,x)\, Q_{n_1}(x,y) \underbrace{\sum_p Q_p(x,x)}_{\infty}$

$\rightarrow$ y récurrent

<u>Th</u> : Il existe une partition de R : $R = \bigsqcup_{i \in I} R_i$ telle que

- si $x \in R_i$ et $y \in R_j$, $j \neq i$, alors $\mathbb{P}_x(H_y = \infty) = 1$
- si $x \in R_i$ et $y \in R_i$, alors $\mathbb{P}_x(H_y < \infty) = 1$
- si $x \notin R$ et $T = \inf\{n, X_n \in R\}$ alors $\mathbb{P}_x$-p.s
  - soit $T = \infty$ et $\forall y \in E$, $N_y < \infty$ ["on part à l'infini"]
  - soit $T < \infty$ et $\exists i \in I$, $\forall n > T$, $X_n \in R_i$

dans ce cas, $\forall y, \ \exists m, \ \forall n \geq m, \ X_n \neq y$

$\forall B$ ensemble fini, $\exists m, \ \forall n \geq m, \ X_n \notin B$

<u>dém</u> : on définit $x \sim y$ si $U(x,y) > 0$ si $x,y \in R$

- $U(x,x) = \infty \rightarrow x \sim x$
- $U(x,y) > 0 \Rightarrow U(y,x) > 0 \rightarrow x \sim y \Rightarrow y \sim x$ [résultat précédent]
- si $Q_m(x,y) > 0$ et $Q_n(y,z) > 0$, alors $Q_{m+n}(x,z) > 0$

$\Rightarrow$ si $x \sim y$, et $y \sim z$, alors $x \sim z$

$\sim$ relation d'équivalence. les classes d'équivalence sont les R_i

. $x \in R_i$, $y \in R_j$, $j \neq i$, $U(x,y) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(H_y = \infty) = 1$

$y \in R_i$, $\mathbb{P}_x(H_y < \infty) = 1$

. $x \notin R$ $T = \infty$ $y \in E$, si $y \in R$, $N_y = 0$

si $y \notin R$, propriété forte de Markov à H_y, $N_y < \infty$ p.s

$T < \infty$ soit i tel que $X_T \in R_i$. propriété de Markov forte appliquée à l'instant T.

<u>déf</u> : (X_n) chaîne de Markov. (X_n) irréductible si $\forall x, y \in E$, $U(x,y) > 0$

<u>Prop</u> : (X_n) chaîne de Markov irréductible. 2 possibilités

- tous les états sont récurrents, une seule classe de récurrence, $\forall x, y$, $\mathbb{P}_x(H_y < \infty) = 1$ [on dit que la chaîne est récurrente]
- tous les états sont transitoires. la chaîne est dite transitoire

<u>dém</u> : . s'il existe un état récurrent, x, $\forall y$, $U(x,y) > 0 \Rightarrow y$ récurrent et $\mathbb{P}_x(H_y < \infty) = 1$

. sinon, tous les états sont transitoires

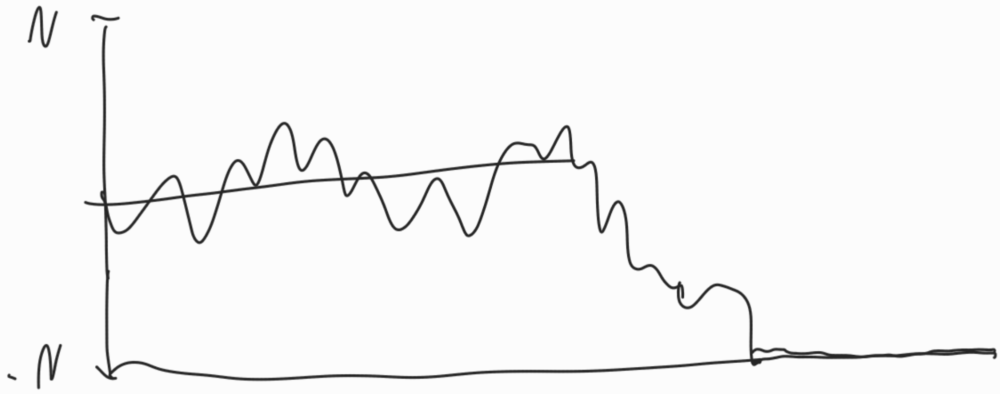
<u>expls</u> : . marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$, irréductible. récurrente $d \leq 2$ transitoire $d \geq 3$

. (S_n) marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, $T = \inf\{n, S_n \in \{-N, N\}\}$

$X_n = S_{T \wedge n}$ admet deux états récurrents : $-N$, N

les autres états sont transitoires

pas irréductible



. (S_n) marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^3$, $T = \inf\{n,\ S_n = (1,0,0)\}$

comme (S_n) est transitoire et irréductible, $0 < \mathbb{P}_0(T < \infty) < 1$

$X_n = S_{T \wedge n}$, (X_n) chaîne de Markov avec $(1,0,0)$ récurrent,

les autres états sont transitoires et si $x \neq (1,0,0)$

$$0 < \mathbb{P}_x(T < \infty) < 1$$