Examen dimanche 16 avril
Seul document autorisé : notes de cours prises par Xiao LI &
Rukai CHEN

---

## Mesures invariantes

déf : $\mu$ mesure invariante pour $(X_n)$ chaîne de Markov sur $E$ si

$$\forall x \in E \quad \mu(x) = \sum_{y \in E} \mu(y) Q(y,x)$$

Cas où $|E| = n$

$Q$ est une matrice $n \times n$ et $\forall x \in E$, $\sum_y Q(x,y) = 1$

$$Q \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$ est vecteur propre pour la valeur

propre 1 $\Rightarrow$ ${}^tQ$ admet 1 comme valeur propre $\Rightarrow \exists V \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

${}^tQ\, V = V \Rightarrow$ si on pose $\mu(x) = V_x$, $\mu$ est une mesure invariante.

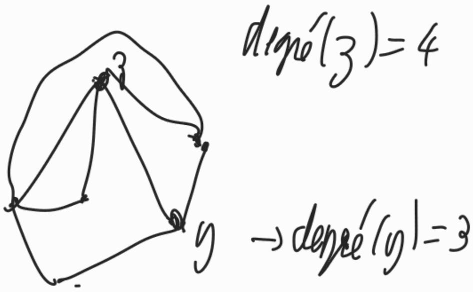
si $X_0$ est aléatoire et $P(X_0 = y) = \mu(y)$ alors $\forall x$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x) = \sum_y \mathbb{P}(X_0 = y)\, Q(y,x) = \sum_y \mu(y) Q(y,x) = \mu(x)$$

Par récurrence, $\forall n, \forall x$, $\mathbb{P}(X_n = x) = \mu(x)$

---

exple : marche aléatoire sur un graphe fini




alors (exercice) $\mu(y) = \text{degré}(y)$ est une mesure invariante.  degré$(y)$ = nombre d'arêtes incidentes à $y$

Th . si $x$ récurrent, alors, la mesure $\mu$ donnée $\mu(y) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=1}^{H_x} \mathbb{1}_{(X_k=y)}\right)$ est invariante
$\hookrightarrow \mu(x)=1$

. en particulier si $y$ est transitoire, $\mu(y)=0$

Th : . si la chaîne est irréductible, il existe une seule probabilité invariante.

. si la chaîne est réunion de $k$ composantes récurrentes irréductibles $C_1, C_2 \dots C_k$, alors il existe une unique proba invariante $\mu_i$ sur chaque $C_i$ et toute mesure invariante s'écrit $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu_i$

Th soit $(X_n)$ chaîne de Markov irréductible sur $E$ ($|E|=n$)
Alors pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, on a $\mathbb{P}_x$-ps

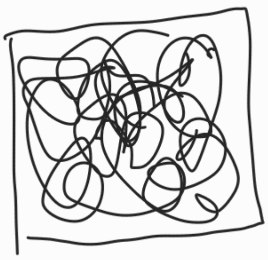
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \longrightarrow \int f\,d\mu = \sum_{y\in E} \mu(y) f(y)$$

où $\mu$ est l'unique proba invariante.

(Théorème ergodique) $\int f d\mu$ : moyenne spatiale (moyenne sur l'espace $E$)

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k)$ : moyenne temporelle (moyenne sur le temps)

remarque : si on prend $X_0$ aléatoire, $X_0 \sim \mu$, alors $\forall n$, $X_n \sim \mu$



"La chaîne remplit tout l'espace de manière homogène"

Remarque : il existe des théorèmes ergodiques pour des systèmes déterministes (systèmes dynamiques) : $T : E \to E$

$$\frac{1}{n}\Big(T(x) + T\circ T(x) + \dots + \underbrace{T\circ \dots \circ T}_{n \text{ fois}}(x)\Big)$$

idée de démonstration : $T_1(x) = H_x = \inf\{n \geq 1,\ X_n = x\}$

$$T_2(x) = H_x \circ \theta_{T_1} = \inf\{n \geq T_1+1,\ X_n = x\}$$

$$T_{n+1}(x) = H_x \circ \theta_{T_n} = \inf\{k \geq T_n+1,\ X_k = x\}$$

on part de $x$, par la propriété forte de Markov, les suites finies

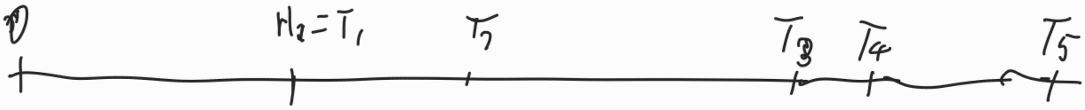
$$\left.\begin{array}{l}(X_0, X_1 \dots X_{T_1-1})\\ (X_{T_1}, X_{T_1+1} \dots X_{T_2-1})\\ (X_{T_2}, X_{T_2+1} \dots X_{T_3-1})\end{array}\right\} \text{ ont la même loi et sont indépendantes}$$

$$A_k^f = \sum_{i=0}^{T_{k+1}-T_k-1} f(X_{T_k+i}), \text{ alors les } (A_k^f)_{k\geq 0} \text{ sont iid}$$

- $\forall y$, le nombre de visites de $y$ avant $H_x$ est aléatoire, géométrique $\to$ d'espérance finie : $N_1(y) = \sum_{i=0}^{H_x} \mathbb{1}_{\{X_i = y\}}$, $\mathbb{E}(N_1(y)) < \infty$

$$H_x = \sum_{y \neq x} N_1(y) \Rightarrow \mathbb{E}(H_x) = \sum_{y\neq x} \mathbb{E}(N_1(y)) < \infty$$

- comme $\mathbb{E}(H_x) < \infty$, $\mathbb{E}(|A_1^f|) = \mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=0}^{H_x} f(X_i)\right|\right) \leq \sup|f| \cdot \mathbb{E}(H_x) < \infty$
- D'après la loi des grands nombres $\dfrac{A_1^f + A_2^f \dots + A_n^f}{n} \xrightarrow{ps} \mathbb{E}(A_1^f)$




$$\frac{\sum_{i=1}^{T_n} f(X_i)}{n} \to \mathbb{E}(A_1)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{T_n} f(X_i)}{T_n} = \frac{\sum_{i=1}^{T_n} f(X_n)}{n} \frac{n}{T_n} \xrightarrow{ps} \frac{\mathbb{E}(A_f)}{\mathbb{E}(H_x)}$$

Un argument technique permet de montrer que $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f(X_i)}{n} \longrightarrow \dfrac{\mathbb{E}(A_f)}{\mathbb{E}(H_x)}$

en prenant tous les entiers $n$ et pas seulement les entiers de la forme $T_k$

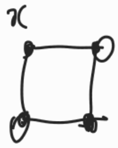
déf : Soit $(X_n)$ chaîne irréductible, $x$ récurrent, la période de $x$ est le PGCD

de $L_x = \{ n \geq 0,\ Q_n(x,x) > 0 \}$

expl : marche aléatoire sur


$L_x = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \dots\}$

période $= 1$



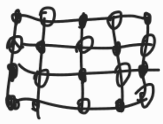

$L_x = 2\mathbb{N}$

$X_{2n}$ est un point •

$X_{2n+1}$ ∘

période $= 2$

plus généralement, période $= 2$ pour la marche aléatoire sur un graphe biparti : graphe où les sommets peuvent être classés en $\left(\begin{smallmatrix} \bullet \\ \circ \end{smallmatrix}\right)$ et toute arête joint • et ∘

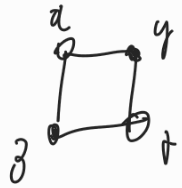


déf : $(X_n)$ chaîne de Markov irréductible, $|E| = n$. $X_n$ est apériodique si la période de tout point de $E$ est $1$

Th : (convergence vers la mesure invariante). $(X_n)$ chaîne de Markov irréductible, apériodique sur $E$ fini, $\mu$ proba invariante. alors $\forall x \in E$,

$$\sum_{y \in E} \left| \mathbb{P}_x(X_n = y) - \mu(y) \right| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

remarque : • si la chaîne n'est pas apériodique, c'est faux




la loi uniforme est l'unique mesure de proba invariante

$\mathbb{P}_x(X_{2n+1} = x) = 0$ or $\mu(x) = \frac{1}{4}$

• si $(X_n)$ chaîne de Markov, la version paresseuse ("lazy random walk") de $(X_n)$ est la chaîne $(Y_n)$ où on a remplacé $Q(x,y)$ par

$$\tilde{Q}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{Q(x,y)}{2} & \text{si } y \neq x \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{Q(x,x)}{2} & \text{si } y = x \end{cases}$$

Si $X_n$ irréductible, $Y_n$ irréductible et on a la même proba invariante $\mu$ : si $\mu(x) = \sum_y \mu(y) Q(y,x)$

alors

$$\mu(x) = \sum_{y \neq x} \mu(y) \frac{Q(y,x)}{2} + \mu(x)\left(\frac{1}{2} + \frac{Q(x,x)}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{\mu(x)}{2} = \sum_y \mu(y) \frac{Q(y,x)}{2}$$

$Y$ est apériodique puisque $\tilde{Q}_n(x,x) > 0 \quad \forall n, \forall x$

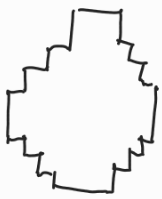
Le théorème de convergence vers la mesure invariante s'applique pour $(Y_n)$

$\mu$ mesure invariante = mesure d'équilibre

invariant measure, equilibrium measure, steady state

Application : génération aléatoire. On veut simuler par ordinateur une variable aléatoire $X$. On trouve une chaîne de Markov $(X_n)$ telle que la loi $\mu$ de $X$ soit la mesure invariante pour $(X_n)$. On part de $X_0$ fixé et pour $n$ assez grand, $X_n$ a presque la même loi que $X$

exemple : pavage du diamant aztèque. On veut tirer au hasard, uniformément, un pavage par des rectangles $2\times 1$



• parfois, on ne sait pas calculer explicitement la loi de $X$. (Physique statistique). $E$ ensemble fini, $\forall x \in E$, $H(x)$ hamiltonien de $x$, on veut simuler une variable aléatoire $X$ telle que

$$P_\beta(X=x) = \frac{e^{+\beta H(x)}}{\underbrace{\sum_{y\in E} e^{\beta H(y)}}_{Z_\beta}} = \mu_\beta(x)$$

Calculer $Z$ est difficile si $E$ très grand. Dans ce cas, on cherche une chaîne de Markov $\left(X_n^{(\beta)}\right)$ telle que $\mu_\beta$ soit la mesure invariante pour $\left(X_n^{(\beta)}\right)$

Méthode de Monte-Carlo...

→ Question : combien de temps doit-on attendre ?

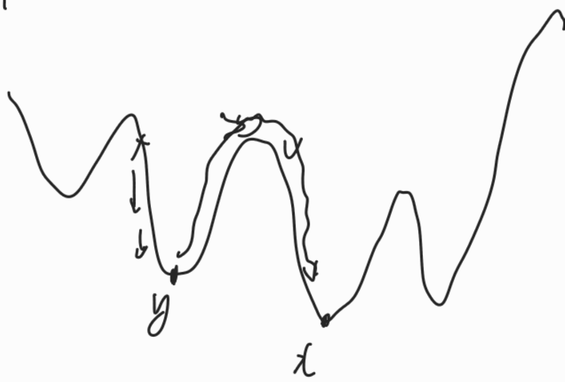
$X_0$, loi de $X_n$ est proche de la loi $\mu$ si $\underbrace{n \text{ est grand}}_{?}$

recuit simulé ("simulated annealing") : $F : E \to \mathbb{R}$ fonction difficile à calculer. Trouver $x$ où $F$ atteint son minimum. $\beta > 0$

→ on cherche une chaîne de Markov $\left(X_n^{(\beta)}\right)$ telle que la proba invariante soit $\mu_\beta(x) = \dfrac{e^{-\beta F(x)}}{\sum_{y\in E} e^{-\beta F(y)}}$. Pour $\beta$ grand et $n$ grand, $X_n^\beta$ est avec proba proche de 1 au point qui minimise $F$

<u>idée</u> : méthode déterministe : on suit la pente :

recuit simulé : $(X_n)$ franchit




---

<u>Cas où $E$ est infini</u> : Dans certains cas, il n'existe pas de mesure invariante.

Si $(X_n)$ irréductible et $x$ récurrent alors

$$\mu(y) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=0}^{H_x-1} \mathbb{1}_{(X_k=y)}\right)$$ est une mesure invariante.

et elle est unique à multiplication près par une constante.

deux cas possibles : $\mu(E) = \sum_{x\in E}\mu(x) < \infty$ $(X_n)$ récurrente positive

$\mu(E) = \infty$ $(X_n)$ récurrente nulle

$$\mu(E) = \sum_{y\in E}\mu(y) = \sum_{y\in E}\mathbb{E}_x\left(\sum_{k=0}^{H_x-1}\mathbb{1}_{(X_k=y)}\right) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=0}^{H_x-1} 1\right) = \mathbb{E}_x(H_x)$$

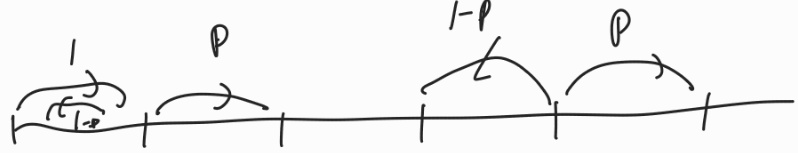
récurrent positif $\iff \mathbb{E}_x(H_x) < \infty$

<u>exple</u> marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ (et sur $\mathbb{Z}^2$) est récurrente nulle

$$\mathbb{P}(H_x = n) = \frac{1}{2^n}\,\frac{2}{n+1}\binom{2n}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{c}{n^{3/2}} \qquad \sum n\,\mathbb{P}(H_x=n) = \infty$$

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$$ : $n$-ième nombre de Catalan

sur $\mathbb{N}$ $\qquad$ $p < \frac{1}{2}$




$$Q(0,1)=1$$

$$n \geqslant 1 \qquad \begin{cases} Q(n,n+1) = p \\ Q(n,n-1) = 1-p \end{cases}$$

$Q$ définit une chaîne de Markov $(X_n)$ sur $\mathbb{N}$ qui est récurrente positive

$\mu(n) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^n \qquad n \geqslant 1 \qquad$ définit une mesure invariante

<u>Th ergodique</u> $(X_n)$ récurrente positive, irréductible, $\mu$ proba invariante

$f$ positive ou $f \in L^1(\mu)$ alors $\forall x$, $\mathbb{P}_x$-ps

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k) \longrightarrow \int f \, d\mu = \sum_{y \in E} \mu(y) f(y)$$