Contre exemple : une suite de variables aléatoires qui convergent en loi mais pas en probabilité

$\mathbb{E}(X_1)=0$

$\mathrm{var}(X_1)=\sigma^2 = \frac{1}{4}$

$X_1, \dots X_n \dots$ iid, $\mathbb{P}(X_1=1)=\mathbb{P}(X_1=-1)=\frac{1}{2}$

$S_n = X_1 + \dots + X_n \qquad \frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{(l)} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

$U_n = \frac{S_{2^n}}{\sqrt{2^n}} \qquad U_n \xrightarrow{(l)} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

Par l'absurde, on suppose qu'il existe X telle que $U_n \xrightarrow{(P)} X$

$\mathbb{P}(|U_n - X| \geq \frac{1}{2}) \to 0$ donc si $n \geq N$ $\mathbb{P}(|U_n - X| \geq \frac{1}{2}) \leq \varepsilon$

$\mathbb{P}(|U_{n+1} - X| \geq \frac{1}{2}) \leq \varepsilon$

par l'inégalité triangulaire, $\boxed{\mathbb{P}(|U_n - U_{n+1}| \geq 1) \leq 2\varepsilon}$

$$U_{n+1} = \frac{(X_1 + \dots X_{2^n}) + (X_{2^n+1} \dots + X_{2^{n+1}})}{\sqrt{2^{n+1}}} = \frac{S_n + V_n}{\sqrt{2^{n+1}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2^n}\, U_n + V_n}{\sqrt{2^{n+1}}} = \sqrt{2}\, U_n + \sqrt{2}\left(\frac{V_n}{\sqrt{2^n}}\right)$$

$$U_{n+1} - U_n = \underbrace{U_n \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)} + \underbrace{\left(\frac{V_n}{\sqrt{2^n}}\right)\sqrt{2}}$$

variables aléatoires indépendantes A_n, B_n

$A_n \to \mathcal{N}(0, c\sigma^2) \qquad B_n \to \mathcal{N}(0, c'\sigma^2)$

$c\sigma^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 \qquad c'\sigma^2 = \frac{1}{4} \cdot 2$

$\mathbb{P}(A_n \geq \frac{1}{2}) \to k > 0$, $\mathbb{P}(B_n \geq \frac{1}{2}) \to k' > 0$

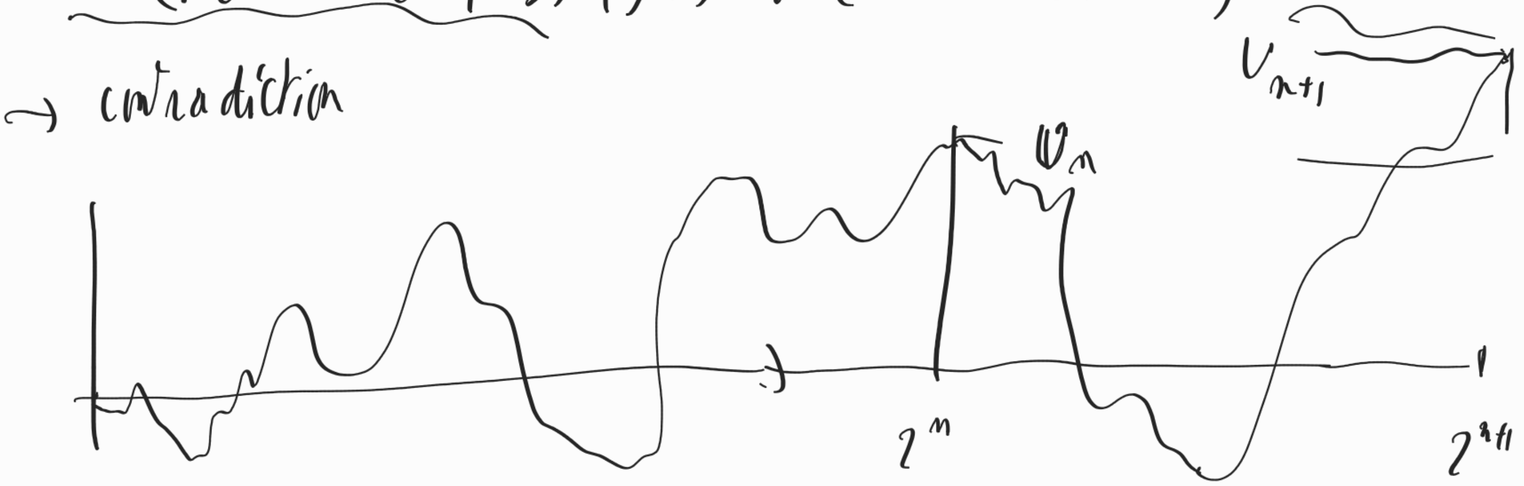
$\to \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,\omega^2) \geq \frac{1}{2})$

$\mathbb{P}(A_n + B_n \geq 1) \geq kk' - \varepsilon$ pour n assez grand

$\mathbb{P}(U_{n+1} - U_n \geq 1) \geq kk' - \varepsilon$

$\mathbb{P}(|U_{n+1} - U_n| \geq 1) \geq \mathbb{P}(U_{n+1} - U_n \geq 1) \geq kk' - \varepsilon > 0$

$\to$ contradiction



CV ps $\Longrightarrow$ CV en proba $\Longrightarrow$ CV en loi

$\not\Longleftarrow$ $\not\Longleftarrow$

TCL en dim d : $X_1 \dots X_n \dots$ iid à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

M matrice de covariance de X_1 : si $X_1 = (X_1^{(1)}, \dots, X_1^{(d)})$

$M_{ij} = \mathrm{cov}(X_1^{(i)}, X_1^{(j)})$, $\mathbb{E}(X_i) = 0$

Alors $\dfrac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{(\ell)} \underbrace{\mathcal{N}(0, M)}_{\text{vecteur gaussien de moyenne 0 et de}}$

matrice de covariance M

Notion de covariance : chap 8 de Le Gall : . si X, Y sont à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

. Si $X = (X_1, \dots, X_d)$ et $Y(Y_1, \dots, Y_d)$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^d$,

la matrice de covariance : M donnée par $M_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, Y_j)$

M est symétrique $\rightarrow$ associée à une forme quadratique qui est positive

$$(\lambda_1, \dots \lambda_d) \mapsto {}^t\lambda M \lambda = \sum_{ij} \lambda_i M_{ij} \lambda_j = \mathrm{var}\left(\sum \lambda_i X_i\right) \geq 0$$

<u>Vecteurs gaussiens</u> : déf : $X = (X_1, \dots X_d)$ est un vecteur gaussien si toute combinaison linéaire de ses coordonnées suit une loi gaussienne

. en particulier $\forall i$, X_i suit une loi gaussienne

. exple : X_i iid, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, alors $(X_1 \dots X_d)$ vecteur gaussien

$$\forall \lambda_1 \dots \lambda_d \qquad \underbrace{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_d X_d} = \mathcal{N}\left(0, \sum \lambda_i^2\right)$$

Attention on peut avoir $\forall i$, X_i suit une loi gaussienne mais X n'est pas un vecteur gaussien

contre exemple : $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, Y indép de X $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}$

alors (X, XY) n'est pas un vecteur gaussien alors que chaque coordonnée suit une loi gaussienne

$$X + XY = X(1+Y) = \begin{cases} 2X & \text{avec proba } \frac{1}{2} \\ 0 & \text{avec proba } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si X est un vecteur gaussien, il admet une matrice de covariance M :

$\forall i,j$ $\mathbb{E}(X_iX_j)$ existe et M est la matrice d'une forme quadratique positive

Réciproque : Si M est la matrice d'une forme quadratique positive, alors $\forall m \in \mathbb{R}^d$, il existe un vecteur gaussien Z de moyenne m et de matrice de covariance M

cas particulier : $M = I_d$ correspond au vecteur où $X_i = m_i + \mathcal{N}(0,1)$ et les X_i sont indép.

Plus généralement, si M est symétrique positive, alors il existe une matrice $d \times d$ A telle que $M = A^2$

$\underbrace{X_i}$ $\underbrace{\text{iid}}$ $\underbrace{\mathcal{N}(0,1)}$ $X = (X_1, \dots, X_d)$, alors le vecteur

$Z = m + AX$ convient

Il suffit de vérifier que la matrice de covariance de Z est M

La matrice de covariance de Z est la même que celle de $\underbrace{Z-m}_{Z'}$

soit $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\langle \xi, Z' \rangle$ suit une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance :

$$\mathbb{E}\left[(\langle \xi, Z' \rangle)^2\right] = \mathbb{E}\left({}^t\xi A X {}^tX A \xi\right) = {}^t\xi A \underbrace{\mathbb{E}(X {}^tX)}_{I} A \xi$$

$${}^t\xi A A \xi = {}^t\xi M \xi \Rightarrow M \text{ est la matrice de covariance de } Z'$$

Quand on a un $i \neq j$, $M_{ij} = 0$ alors Z_i et Z_j sont indépendantes

$\rightarrow$ pour les vecteurs gaussiens indépendance $\Leftrightarrow$ covariance nulle

ce n'est pas vrai si les vecteurs ne sont pas gaussiens

exple X, Y indép avec $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(Y=-1) = \frac{1}{2}$ $\quad \mathbb{E}(X^2) < \infty$

$$(X, XY) = (X, Z) \qquad \text{cov}(X,Z) = \underbrace{\mathbb{E}(XZ)}_{0} - \underbrace{\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z)}_{0}$$

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\underbrace{\mathbb{E}(Y)}_{} = 0$$

$\mathbb{E}(XZ) = 0$ car avec proba $\frac{1}{2}$ $XZ = X^2$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \frac{1}{2}$ $XZ = -X^2$

$\text{cov}(XZ) = 0$ mais X, Z non indép : $\underline{\mathbb{P}(X > a, Z > a)} = \mathbb{P}(X > a, Y = 1)$
$$= \underline{\tfrac{1}{2}\mathbb{P}(X > a)}$$

$$\underline{\mathbb{P}(X > a)\,\mathbb{P}(Z > a)} = \mathbb{P}(X > a)\left[\mathbb{P}(X > a, Y=1) + \mathbb{P}(X < a, Y = -1)\right]$$
$$= \mathbb{P}(X > a)\left(\tfrac{1}{2}\mathbb{P}(X > a) + \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(X < a)\right)$$
$$= \underline{\tfrac{1}{2}\mathbb{P}(X > a)\left[\mathbb{P}(X > a) + \mathbb{P}(X < a)\right]}$$

Densité d'un vecteur gaussien de moyenne m, matrice de cov M, au pt $x = (x_1, \ldots x_d)$

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d (\det M)}} \exp\left({}^t(x - m)\, M\, (x - m)\right)$$

formule de changement de variable (chap 7)

En particulier si $M = Id$, et $m = 0$, densité :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \exp\left(-\sum x_i^2\right)$$

si $X \sim \mathcal{N}(0, Id)$ pour toute isométrie donnée par une matrice orthogonale A, AX est un vecteur gaussien $\sim \mathcal{N}(0, I)$!

si $\xi \in \mathbb{R}^d$ $\langle \xi, AX \rangle$ suit une loi gaussienne variance

$$\mathbb{E}(\langle \xi, AX \rangle^2) = \mathbb{E}({}^t\xi\, {}^tX\, \underbrace{{}^tA A}_{Id \text{ car } A \text{ orthogonale}} X \xi) = \mathbb{E}({}^t\xi\, {}^tX X \xi)$$

$= {}^t\xi \xi \Rightarrow$ matrice de cov de AX est Id

AX a même loi que $X \to$ on dit que X est invariant par transformation orthogonale (invariant par isométrie)

Cas particulier $d=2$ (X,Y) X, Y indep $\sim \mathcal{N}(0,1)$

(X,Y) invariant par rotation

Dans le chapitre 7, on définit la loi uniforme sur la sphère unité $\to \omega_d$

$S^{d-1} = \{ U \in \mathbb{R}^d, \|U\|_2 = 1 \}$

B borélien $\subset S^{d-1}$, $\Gamma(B) = \{ U \in \mathbb{R}^d, 0 < \|U\| \leq 1, \frac{1}{\|U\|} U \in B \}$
$= (\text{cone de } B \cap B(0,1)) \setminus \{0\}$

cone de $B = \{ U \in \mathbb{R}^d, \exists\, r \in \mathbb{R}_+, \exists\, b \in B, U = rb \}$

$$\omega_d(B) = \frac{Leb(\Gamma(B))}{Leb(B(0,1))}$$

$\omega_d(B)$ est invariante par tf orthogonale [conséquence de l'invariance par tf orthogonale de la mesure de Lebesgue]

Soit $X = (X_1 \dots X_d) \sim \mathcal{N}(0, I_d)$, alors p.o $\|X\|_2 = 0$

$\rightarrow \boxed{Y = \frac{1}{\|X\|_2} X}$ est bien défini p.o. et $\in S^{d-1}$

Comme X est invariant par rf orthogonale, Y est invariant par rf orthogonale.

On peut montrer qu'il existe une seule mesure de probabilité sur S^{d-1} invariante par rf orthogonale

Y est uniforme sur la sphère S^{d-1}

Théorème : $Y_d = (Y_d^{(1)}, \dots Y_d^{(d)})$ uniforme sur la sphère S^{d-1}

$$\sqrt{d}\, Y_d^{(1)} \xrightarrow{(\ell)} \mathcal{N}(0,1)$$

dém $X_d \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ dans $\mathbb{R}^d$

$$Y_d = \frac{X_d}{\|X_d\|} = \frac{X_d}{\sqrt{X_1^2 + \dots + X_d^2}}$$

$$\sqrt{d}\, Y_d^{(1)} = \frac{X_d^{(1)}}{\sqrt{\frac{X_1^2 \dots + X_d^2}{d}}}$$

idée : $\left(\frac{X_1^2 + \dots + X_d^2}{d}\right)$ CV vers 1 par la loi des grands nombres p.o et dans L^1 $\rightarrow$ de même pour $\sqrt{\frac{d}{X_1^2 + \dots + X_d^2}}$

$$\mathbb{P}\left(X_d^{(1)} \in [a,b]\right) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx}_{} \leftarrow \mu(a,b)$$

$\forall \varepsilon,\quad \exists D,\quad \forall d \geq D,\quad$ avec proba $> 1-\varepsilon$, $\quad \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{X_1^2 \cdots + X_d^2}{d}}} \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$

On en déduit que $\mathbb{P}\left(\dfrac{X_d^{(1)}}{\sqrt{\dfrac{X_1^2 \cdots + X_d^2}{d}}} \in [a(1-\varepsilon), b(1+\varepsilon)]\right)$

$$\in \left(\mu(a,b)(1-\varepsilon),\ \mu(a,b)(1+\varepsilon)\right) \quad \text{si } d > D$$

$$\rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{X_d^{(1)}}{\sqrt{\dfrac{X_1^2 \cdots + X_d^2}{d}}} \in [a,b]\right) \longrightarrow \mu(a,b)$$