Cette semaine, cours le 14, 16, 17

La semaine prochaine 4 cours d'algèbre avec L. Ménil

Martingale / filtration $\mathcal{F}_n$: suite de v.a M_n dans L^1 et telle que pour tout n, $\mathbb{E}(M_{n+1} / \mathcal{F}_n) = M_n$

On utilise beaucoup le vocabulaire des jeux de hasard. Voir Mme Claeys si vous avez des difficultés avec ce vocabulaire.

Si (H_n) prévisible, alors $(H.X)_n$ est une martingale

<u>exemple</u> : $Y_1, Y_2 \dots Y_n \dots$ iid $\mathbb{E}(Y_1) = 0$

$X_n = Y_1 + \dots + Y_n$ est une martingale

Si on joue à pile ou face, pile : gagne $+1$
face : perd -1

$$\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{1}{2} = P(Y_1 = -1)$$

$H_n = 1$ si $X_{n-1} \geq 0$
$H_n = 2$ si $X_{n-1} < 0$

H_n prévisible : borné, mesurable / $\mathcal{F}_{n-1}$

$(H.X)_n = (H.X)_{n-1} + Y_n$ si $X_{n-1} \geq 0$

$(H.X)_{n-1} + 2Y_n$ si $X_{n-1} < 0$

$\Leftarrow$) $\mathbb{E}((H.X)_n / \mathcal{F}_n)$
$= (H.X)_{n-1}$

<u>contre-exemple</u> : X_n, Y_n comme ci-dessus

$H_n = 1$ si $Y_n = 1$
0 si $Y_n = -1$

H_n n'est pas prévisible : mesurable / $\mathcal{F}_n$ → adapté

pas mesurable / $\mathcal{F}_{n-1}$

$(H.X)_n = (H.X)_{n-1} + 1$ si $Y_n = 1$

$ (H.X)_{n-1}$ si $Y_n = -1$

$\mathbb{E}\left((H.X)_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = (H.X)_{n-1} + \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $(H.X)$ n'est pas une martingale

---

Prop : (X_n) processus adapté, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ convexe, telle que $\mathbb{E}(\varphi(X_n)) < \infty$

(i) si (X_n) martingale, $\varphi(X_n)$ sous-martingale

(ii) si (X_n) sous-martingale et $\varphi \nearrow$, $\varphi(X_n)$ sous-martingale

dém (i) Inégalité de Jensen pour l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}(\varphi(X_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}) \geq \varphi(\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})) = \varphi(X_{n-1})$$

(ii) φ croissante et $X_n \leq \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$

$$\mathbb{E}(\varphi(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) \geq \varphi(\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)) \geq \varphi(X_n)$$

Idée : un joueur joue au casino et décide de s'arrêter à un certain moment

$\rightarrow$ notion de temps d'arrêt ("stopping time" en anglais)

déf : $(\mathcal{F}_n)$ filtration, on dit que $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\} = \bar{\mathbb{N}}$ est un temps d'arrêt $/ \mathcal{F}_n$ si, $\forall n \in \bar{\mathbb{N}}$, $\{T_n = n\} = \mathcal{F}_n$

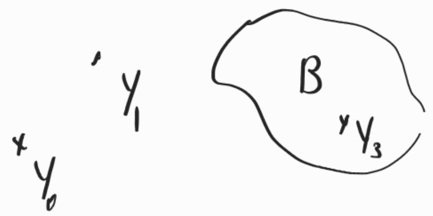
$\{T_n = n\}$ est l'événement "on s'arrête au temps n". Cet événement dépend de la quantité d'information qu'on a au temps n ; cette quantité d'information est donnée par $\mathcal{F}_n$.

exemple : (i) $k \in \mathbb{N}$, si $\forall \omega \in \Omega$, $T(\omega) = k$, T est un temps d'arrêt.

$\forall n$, $\{T_n = n\} = \Omega$ ou $\emptyset$ $\in \mathcal{F}_n$ par définition d'une tribu

(ii) temps d'entrée : (Y_n) processus adapté à $\mathcal{F}_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, si B est un borélien $\subset \mathbb{R}^d$,

$$T_B = \inf\{n,\ Y_n \in B\} \text{ est un temps d'arrêt}$$



ici $T_B = 3$

$$\{T_B = n\} = \{Y_0 \notin B, Y_1 \notin B \dots Y_{n-1} \notin B, Y_n \in B\} \in \mathcal{F}_n \quad \text{si } (Y_n) \text{ adapté à } (\mathcal{F}_n)$$

<u>contre exemple</u> : dernier temps de sortie (Y_n) processus adapté à $(\mathcal{F}_n)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, B borélien de $\mathbb{R}^d$

$$T_B = \sup\{n,\ Y_{n-1} \in B,\ Y_n \notin B\}$$

$$\{T_B = n\} = \{Y_{n-1} \in B,\ Y_n \notin B,\ \forall m \geq n, \text{ on n'a pas } Y_m \in B,\ Y_{m+1} \notin B\}$$

$$= \underbrace{\{Y_{n-1} \in B, Y_n \in B\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{\forall m \geq n, \text{ on n'a pas } Y_m \in B\ Y_{m+1} \notin B\}}_{\substack{? \\ \text{n'est pas forcément dans } \mathcal{F}_n}}$$

On décide de s'arrêter en connaissant le passé mais pas en connaissant le futur.

<u>Prop</u> : (i) si S, T sont des temps d'arrêt, $S \vee T$ et $S \wedge T$ sont des temps d'arrêt ($S \vee T = \sup(S,T)$, $S \wedge T = \inf(S,T)$)

(ii) Si (T_n) est une suite de temps d'arrêt, $\inf(T_n)$, $\sup(T_n)$,

$\limsup(T_n)$, $\liminf(T_n)$ sont des temps d'arrêt.

<u>dém</u> (i) $\{S \wedge T \leq n\} = \{S \leq n\} \cup \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \Rightarrow \{S \wedge T = n\} \in \mathcal{F}_n$

$\{S \vee T \leq n\} = \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

(ii) $\{\inf(T_k) \leq n\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{T_k \leq n\}$ etc.

<u>déf</u> : soit T un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)$. La tribu du passé jusqu'à l'instant T est

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F},\ \forall n \in \mathbb{N},\ A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

<u>Prop</u> : Si S et T sont deux temps d'arrêt, et si $S \leq T$, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$

<u>dém</u> : $A \in \mathcal{F}_S$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$

$$A \cap \{T = n\} = \bigcup_{k \leq n} \left[A \cap \{S = k\} \cap \{T = n\}\right] \in \mathcal{F}_n \Rightarrow A \in \mathcal{F}_T$$

<u>exemple</u> : (Y_n) processus adapté $/\mathcal{F}_n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, B borélien de $\mathbb{R}^d$,

$T_B = \inf\{n,\ Y_n \in B\}$, A événement $\{\exists n,\ Y_n \in B\}$

alors $A \in \mathcal{F}_{T_B}$: $A \cap \{T = n\} = \{Y_0 \notin A, \dots Y_{n-1} \notin A, Y_n \in A\}$

$= \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$

<u>Prop</u> : (Y_n) adapté $/\mathcal{F}_n$, T temps d'arrêt $/\mathcal{F}_n$. Alors la variable aléatoire $\mathbb{1}_{\{T < \infty\}} Y_T$ définie par
$$\begin{cases} \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} Y_T(\omega) = 0 & \text{si } T(\omega) = +\infty \\ \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} Y_T(\omega) = Y_n & \text{si } T(\omega) = n \end{cases}$$

est mesurable $/\mathcal{F}_T$

<u>dém</u> : B borélien, $n \in \mathbb{N}$

$$\{\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} Y_T \in B\} \cap \{T=n\} = \{Y_n \in B\} \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_n$$

<u>Théorème</u> (X_n) martingale $/(\mathcal{F}_n)$. T temps d'arrêt $/(\mathcal{F}_n)$. Alors $(X_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale. Si T est borné, alors $X_T \in L^1$ et $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$

<u>idée</u> : Si (X_n) est la quantité d'argent d'un joueur au casino et si T est le temps où le joueur décide de s'arrêter, $X_{T\wedge n} = \begin{cases} X_n & \text{si } T \geq n \text{ (le joueur joue encore au temps } n) \\ X_T & \text{si } T \leq n \text{ (le joueur a arrêté de jouer au temps } n) \end{cases}$

$(X_{T\wedge n})$ martingale et $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$: en moyenne, le joueur n'a pas gagné d'argent au moment où il s'arrête.

<u>dém</u> : . Remarque : $\forall n$, $T\wedge n$ est un temps d'arrêt

$n \geq 1$. $H_n = \mathbb{1}_{\{T\geq n\}} = 1 - \mathbb{1}_{\{T\leq n-1\}}$ alors (H_n) prévisible :

$\mathbb{1}_{\{T\leq n-1\}}$ mesurable $/\mathcal{F}_{n-1} \Rightarrow H_n$ mesurable $/\mathcal{F}_{n-1}$

$(X_0 + (H.X)_n)_{n\geq 0}$ est une martingale

$$X_0 + (H.X)_n = X_{T\wedge n}$$

Si T est borné, $\exists N \in \mathbb{N}$, $T \leq N$ p.s. alors $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_{T\wedge N})$
$= \mathbb{E}(X_0)$

<u>Application</u> : risque de ruine du joueur : un joueur joue au casino, au début, sa fortune est $X_0 = m$.

(Y_i) iid, $\quad \mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Y_1 = -1)$

La fortune du joueur au temps n est $X_0 + Y_1 + \dots + Y_n = X_n$; (X_n) martingale

Le joueur décide de s'arrêter quand sa fortune atteint une valeur N.

$B = [N, +\infty)$, T_B est le temps d'arrivée dans B → temps d'arrêt

Le joueur veut s'arrêter au temps T_B

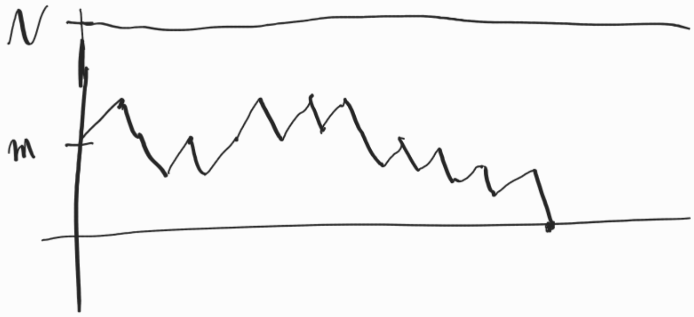
Soit $B' = (-\infty, 0]$ $T_{B'}$ est aussi un temps d'arrêt : temps où le joueur est ruiné : il n'a plus d'argent et il ne peut plus jouer.

Soit $T = T_B \wedge T_{B'} = T_{B''}$ temps d'arrivée dans $B'' = (-\infty, 0] \cup [N, +\infty)$

premier temps où soit le joueur est ruiné, soit il a N dollars.

$$X_T = \begin{cases} N & \text{si } T_B < T_{B'} \iff T_{B''} = T_B \\ 0 & \text{si } T_{B'} < T_B \iff T_{B''} = T_{B'} \end{cases}$$

risque de ruine : $\mathbb{P}(X_T = 0)$



- $X_n = \underbrace{X_0}_{m} + Y_1 + Y_2 \cdots + Y_n$ on a vu (Prop 10.2.2)

que p.s $\limsup (Y_1 + \cdots + Y_n) = +\infty \Rightarrow$ p.s, $T_B < \infty$

$\liminf (Y_1 + \cdots + Y_n) = -\infty \Rightarrow$ p.s, $T_{B'} < \infty$

$\Rightarrow$ p.s, $T = T_B \wedge T_{B'} < \infty$

- $(X_{T \wedge n})$ martingale

On pose $M_n = X_{T \wedge n}$

Pour tout $K \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}(M_K) = \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(X_0)$

$M_K = X_{T \wedge K}$

On distingue trois cas : - soit $T \leq K$, $T = T_B$, $X_{T \wedge K} = N$

- soit $T \leq K$, $T = T_{B'}$, $X_{T \wedge K} = 0$

- soit $T > K$

$$\mathbb{E}(M_K) = \mathbb{E}\left[M_K \left(\mathbb{1}_{(T \leq K, T = T_B)} + \mathbb{1}_{(T \leq K, T = T_{B'})} + \mathbb{1}_{(T > K)}\right)\right] = \mathbb{E}(X_0)$$

$$= N\, \mathbb{P}(T \leq K, T = T_B) + 0 \cdot \mathbb{P}(T \leq K, T = T_{B'}) + \mathbb{E}(M_K \mathbb{1}_{T > K})$$

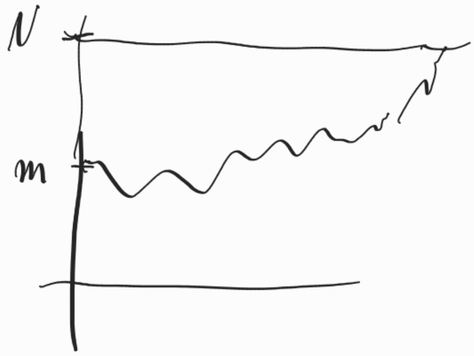
sur l'événement $\{T > K\}$, $1 \leq M_K \leq N-1$

$$1 \cdot P(T \geq K) \leq \mathbb{E}(M_K \mathbb{1}_{\{T > K\}}) \leq (N-1)\, \mathbb{P}(T > K) \qquad (*)$$

comme p.s, $T < +\infty$, $\mathbb{P}(T \geq K) \xrightarrow[K \to +\infty]{} 0$ et d'après $(*)$,

$$\mathbb{E}(M_K \mathbb{1}_{\{T > K\}}) \xrightarrow[K \to +\infty]{} 0$$

donc $\mathbb{E}(X_0) = N \underbrace{\mathbb{P}(T \leq K, T = T_B)}_{\to \mathbb{P}(T = T_B)} + \underbrace{\mathbb{E}(M_K \mathbb{1}_{T \geq K})}_{\to 0}$



$$\mathbb{E}(X_0) = m = N\, \mathbb{P}(T = T_B) = \mathbb{E}(X_T)$$

$$\mathbb{P}(T = T_B) = \frac{m}{N}$$

risque de ruine $= \mathbb{P}(X_T = 0) = \mathbb{P}(T = T_{B'}) = 1 - \frac{m}{N}$

Application la plus classique du théorème d'arrêt pour les martingales.

Ce n'est pas une application immédiate car T n'est pas borné.

Remarque : T_B = temps d'arrivée dans $[N, +\infty)$ est un temps d'arrêt, fini p.s.

$(X_{T_B \wedge n})$ est une martingale

$$X_{T_B} = N \neq \mathbb{E}(X_0) = m$$: ici, on ne peut pas appliquer la 2e partie du théorème d'arrêt car T_B n'est pas borné.