T temps d'arrêt, M martingale, $(M_{T\wedge n})$ martingale
T borné $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$

Convergence presque sûre des martingales

<u>Th 1</u> : Si (M_n) est une martingale positive ($\forall n$, $M_n \geq 0$ p.s.)
alors M_n converge presque sûrement : p.s., $\exists M_\infty$, $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} M_\infty$
M_∞ variable aléatoire

Cas des martingales bornées dans L^2

Soit (M_n) martingale telle que $\forall n$ $\mathbb{E}(M_n^2) < \infty$ et $\sup_n \mathbb{E}(M_n^2) < \infty$

<u>Th 2</u> : M_n converge presque sûrement.

<u>Prop</u> : $A_{n+1} = M_{n+1} - M_n$. Alors les variables aléatoires A_n sont dans L^2 et sont orthogonales : $\forall m \neq n$, $\mathbb{E}(A_m A_n) = 0$

<u>remarque</u> : $\mathbb{E}(A_{n+1}) = \mathbb{E}(M_{n+1}) - \mathbb{E}(M_n) = 0$

<u>dém</u> : $\mathbb{E}(A_{n+1}^2) = \mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)^2 | \mathcal{F}_n))$

$$\leq \underbrace{\mathbb{E}(M_{n+1}^2)}_{<\infty} + \underbrace{\mathbb{E}(M_n^2)}_{<\infty} + \underbrace{2\,\mathbb{E}(M_{n+1} M_n)}_{\leq 2\sqrt{\mathbb{E}(M_{n+1}^2)\mathbb{E}(M_n^2)}}$$

par Cauchy-Schwarz

$< \infty$

donc $A_{n+1} \in L^2$

si $m < n$, $\mathbb{E}(A_m A_n) = \mathbb{E}\left((X_{m+1} - X_m)(X_{n+1} - X_n)\right)$

$$= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left((X_{m+1}-X_m)(X_{n+1}-X_n) / \mathcal{F}_n\right)\right)$$

$m < n \rightarrow X_{m+1} - X_m$ mesurable $/ \mathcal{F}_n$

$$= \mathbb{E}\Big[(X_{m+1} - X_m)\underbrace{\mathbb{E}\left((X_{n+1}-X_n) / \mathcal{F}_n\right)}_{0}\Big]$$

$$= 0$$

Conséquence : si $m < n$, $X_n = (X_n - X_{n-1}) + (X_{n-1} - X_{n-2}) \cdots + (X_{m+1} - X_m) + X_m$

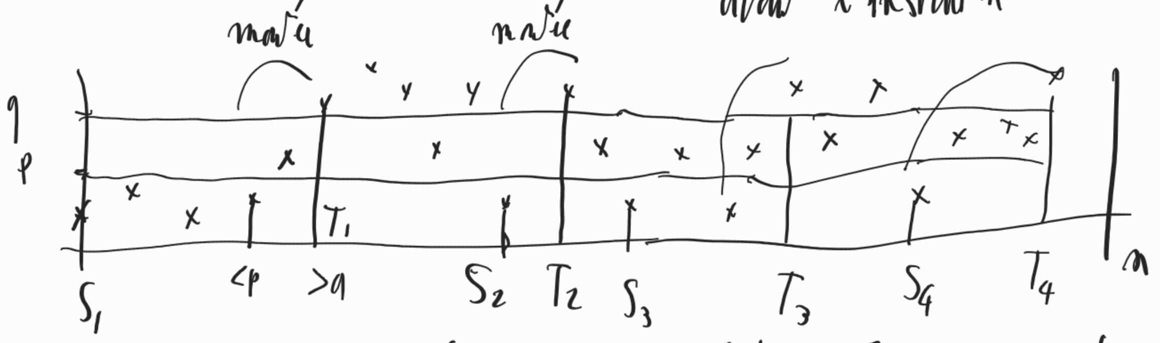
$$= A_{n-1} + \cdots + A_{m+1} + X_m$$

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}(A_{n-1}^2) + \cdots + \mathbb{E}(A_{m+1}^2) + \mathbb{E}(X_m^2) \geq \mathbb{E}(X_m^2)$$

donc $\mathbb{E}(X_n^2)$ est une suite croissante.

L'hypothèse X_n bornée dans $L^2 \Leftrightarrow \mathbb{E}(X_n^2) \longrightarrow L < \infty$

Soient $p < q \in \mathbb{Q}$, $N_{p,q}(n)$: nombre de montées de l'intervalle (p, q) avant l'instant n



nb de montées : 4

$S_1 = \inf\{m, M_m < p\}$, $T_1 = \inf\{m > S_1, M_m > q\}$

$S_{k+1} = \inf\{n > T_k, M_n < p\}$, $T_{k+1} = \inf\{m > S_k, M_m > q\}$

$N_{pq}(n) = \max\{k, T_k \leq n\}$

<u>Idée :</u> à chaque montée, on augmente le carré de la norme L^2 de (M_n)

Ce carré de la norme est borné donc le nombre de montées est borné

$$\mathbb{E}\left(N_{pq}(n)\,(q-p)^2\right) \le \mathbb{E}(M_n^2)$$

$$\mathbb{E}(M_n^2) = \mathbb{E}\left((A_1+A_2 \dots + A_n)^2\right) \underset{\text{orthogonalité}}{=} \mathbb{E}(A_1^2 + A_2^2 \dots + A_n^2)$$

$\forall k$, $\mathbb{E}\left((\underbrace{M_{T_k}}_{>q} - \underbrace{M_{S_k}}_{<p})^2\right) \ge (q-p)^2$

sur l'événement $\{N_{pq}(n)=k\}$, $\mathbb{E}(M_n^2) \ge \mathbb{E}\left((M_{T_1}-M_{S_1})^2\right) + \mathbb{E}\left((M_{T_2}-M_{S_2})^2\right)$

$\dots + \mathbb{E}\left((M_{T_k}+M_{S_k})^2\right)$

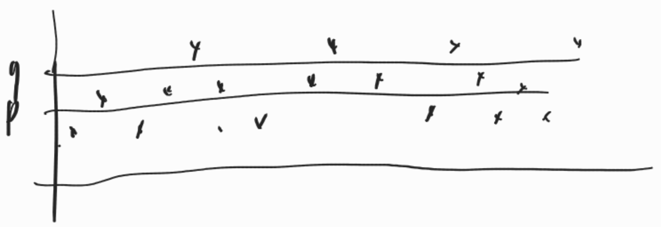
$\ge k(q-p)^2$

$$\mathbb{E}(M_n^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(M_n^2\, \mathbb{1}_{\{N_{pq}(n)=k\}}\right) \ge \sum_{k=1}^{\infty} k\,(q-p)^2\, P(N_{pq}(n)=k)$$

$$= (q-p)^2\, \mathbb{E}(N_{pq}(n))$$

$\forall n$ $$\mathbb{E}\Big(\overbrace{N_{pq}(n)}^{\text{suite croissante}}\Big) \le \frac{L}{(q-p)^2}$$

$\mathbb{P}\left(N_{pq}(n) \to \infty\right) = 0$ $\to$ le nombre de montées de $[p,q]$ est fini p.s.



pour n assez grand, M_n ne traverse pas l'intervalle $[p,q]$

. Le nombre de montées de $[p,q]$ est fini sauf sur Ω_{pq}, $P(\Omega_{p,q})=0$

$\Omega' = \bigcup_{p,q\in\mathbb{Q}} \Omega_{p,q}$, $\mathbb{P}(\Omega')=0$

le nombre de montées de tout intervalle de la forme $[p,q]$, $p<q$, $p,q \in \mathbb{Q}$,

est fini sauf sur Ω'

On peut montrer la même chose pour les descentes.

Donc p.s., $\forall p,q \in \mathbb{Q}$, (M_n) ne traverse $[p,q]$ qu'un nombre fini de fois

$\Rightarrow$ p.s, (M_n) converge

On utilise la propriété : (U_n) converge si et seulement si $\forall p,q \in \mathbb{Q}$, U_n traverse $[p,q)$ un nombre fini de fois

Cela démontre le théorème 2

Pour démontrer le théorème 1 : même idée de prouver qu'on traverse $[p,q]$ un nombre fini de fois

on montre $\mathbb{E}(N_{pq}(n))\ (q-p) \leq \mathbb{E}\left((M_n-a)^+ - (M_0-a)^+\right)$

avec la notation $x^+ = \sup\{x,0\}$

Puis on utilise une démonstration analogue (p. 170-172 dans Le Gall)

<u>Application</u> : extinction des processus de Galton-Watson critiques

processus de Galton-Watson : modéliser l'évolution d'une population où chaque individu a un nombre aléatoire d'enfants suivant une loi μ, indépendamment des autres individus. (Z_n) Z_n = nombre d'individus à la génération n.

$Z_0 = 1$

$Z_1 = X_1^{(1)} \sim \mu$

$Z_2 = X_1^{(2)} + \dots + X_{Z_1}^{(2)}$

$Z_{n+1} = X_1^{(n+1)} + \dots + X_{Z_n}^{(n+1)}$

$Z_0 = 1$

$Z_1 = 3$

$Z_2 = 6$

$Z_3 = 7$

si $Z_k = 0$, $Z_n = 0$ $\forall n \geq k$

la population s'éteint

Si le nombre moyen d'enfants $= \mathbb{E}(Z_1) = m$

$\left(\frac{Z_n}{m^n}\right)$ est une martingale

$\begin{cases} m = 1 & \text{processus critique} \\ m > 1 & \text{surcritique} \\ m < & \text{sous-critique} \end{cases}$

Th : si $m \leq 1$ et si $\mathbb{P}(Z_1 = 1) \neq 1$, alors p.s, le processus s'éteint :

$\forall n \geq 1, \ Z_n = 0$

démo : $m = 1$, Z_n est une martingale ≥ 0 avec proba 1,

elle converge vers Z_∞ qui est une variable aléatoire

Comme $(Z_n) \in \mathbb{N}$, Z_n converge $\Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{N}, \exists N, \ \forall n \geq N, Z_n = l$

Soit $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 1$, soit $N \in \mathbb{N}$, $\underline{\mathbb{P}(\forall n \geq N, Z_n = l) = 0}$

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = l \mid Z_k = l) < 1$$

$\Omega_{l,N} = \{\forall n \geq N, \ Z_n = l\}$, $\mathbb{P}(\Omega_{l,N}) = 0$

$\Omega' = \bigcup_{\substack{l \geq 1, l \in \mathbb{N} \\ N \in \mathbb{N}}} \Omega_{l,N}$ $\qquad \mathbb{P}(\Omega') = 0$

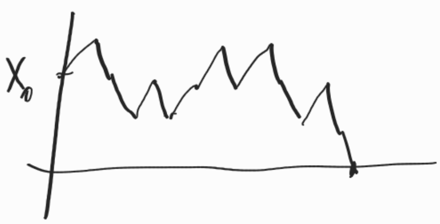
mais comme la suite est convergente p.s, avec proba 1, il existe l, N

$\forall n \geq N, \ Z_n = l$ donc p.s, $l = 0$ $\rightarrow$ le processus s'éteint p.s

Remarque : la CV est une CV p.s, pas dans L^1

$\mathbb{E}(Z_0) = 1 \qquad Z_\infty = 0$ p.s, $\mathbb{E}(Z_\infty) = 0 \neq \mathbb{E}(Z_0)$

retour sur la marche aléatoire simple : $X_n = X_0 + Y_1 + Y_2 \ldots + Y_n$ où les (Y_i) sont iid $\quad \mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = -1) = \frac{1}{2}$



(X_n) martingale. $T = T_0 = \inf\{n, X_n = 0\}$ est temps d'arrêt

$M_n = X_{T\wedge n}$ est une martingale ≥ 0 si $X_0 \geq 0$

Si $M_n = 0$, alors $\forall m > n$, $M_m = 0$

M_n CV p.s. or M_n a des valeurs entières et $\mathbb{P}(M_n = M_{n+1} = \ell) = 0$

si $\ell \geq 1$ donc M_n ne peut être stationnaire qu'en 0 $\Rightarrow$ p.s, $M_n \to 0$

$\Rightarrow$ p.s., $T < \infty$. On avait montré $T < \infty$ p.s. en utilisant une loi du 0-1 de Kolmogorov

Le théorème de CV des martingales donne une autre preuve du fait que $T < \infty$ p.s. On n'a pas CV dans L^1 puisque $M_0 = X_0 > 0$ et

$M_\infty = 0$ p.s donc $\mathbb{E}(M_0) \neq \mathbb{E}(M_\infty) = 0$

Dans certains cas, on a CV dans L^1

<u>Th</u> (X_n) martingale. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) X_n converge p.s et dans L^1 vers X_∞

(ii) il existe une variable aléatoire $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que $\forall n$, $X_n = \mathbb{E}(Z / \mathcal{F}_n)$

Dans ce cas, $Z = X_\infty$ p.s ; on dit que (X_n) est une martingale fermée

<u>dém</u> (i) $\Rightarrow$ (ii), si $m > n$, $X_n = \mathbb{E}(X_m / \mathcal{F}_n)$

Or l'application $Y \mapsto \mathbb{E}(Y / \mathcal{F}_n)$ est une contraction dans L^1 : $\mathbb{E}|Y| \geq \mathbb{E}|\mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_n)|$

$X_n = \mathbb{E}(X_m / \mathcal{F}_n)$ $\quad m \to \infty \quad$ $X_n = \mathbb{E}(X_\infty / \mathcal{F}_n)$

(ii) $\Rightarrow$ (i) : X_n est bornée dans L^1. On a montré que les martingales ≥ 0 CV p.s.

On montre de même que les sous-martingales positives CV p.s, puis que les sous-martingales bornées dans L^1 CV. p.s. ($X_n^+ = \inf(X_n, 0)$ CV p.s et $X_n - X_n^+$

cv p.s) $\to$ X CV. p.s. vers X_∞

Si Z est bornée : $\exists K$ $|Z| \leq K$ p.s, alors $|X_n| \leq K$ p.s et par le théorème de convergence dominée, $X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$

Si Z n'est pas bornée : soit $\varepsilon > 0$ et soit M tq $\mathbb{E}(Z \mathbb{1}_{|Z|>M}) \leq \varepsilon$ (**)

$\forall n,$ $\mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{|Z|\leq M} \mid \mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z(1-\mathbb{1}_{|Z|\leq M}) \mid \mathcal{F}_n)) \leq \varepsilon$

$\left(\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{|Z|\leq M} \mid \mathcal{F}_n)\right)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée $\to$ CV p.s. et dans L^1

$\exists n_0$, $\forall m, n \geq n_0$ $\mathbb{E}\left|\left(\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{|Z|\leq M} \mid \mathcal{F}_m) - \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{|Z|\leq M} \mid \mathcal{F}_n)\right)\right| < \varepsilon$ (*)

(*) et (**) $\Rightarrow$ $\mathbb{E}|X_m - X_n| \leq 3\varepsilon$

Donc (X_n) est une suite de Cauchy dans L^1 et L^1 est complet $\Rightarrow$ X_n CV dans L^1

<u>Corollaire</u> soit $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. $X_n = \mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}_n)$ est une martingale qui converge p.s et dans L^1 vers $\mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}_\infty)$ où $\mathcal{F}_\infty$ est la tribu engendrée par les $\mathcal{F}_n$: la plus petite tribu contenant toutes les $\mathcal{F}_n$

<u>dem</u> : dans le théorème précédent, on a montré la cv p.s et dans L^1 vers X_∞. Il faut montrer $X_\infty = \mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}_\infty)$.

$\forall n,$ X_n est mesurable $/\mathcal{F}_\infty$ et $X_n \xrightarrow{p.s} X_\infty \Rightarrow X_\infty$ est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable

si $A \in \mathcal{F}_n$, $\mathbb{E}(Z \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_\infty \mathbb{1}_A)$

Classes monotones : c'est vrai pour tout $A \in \underbrace{\text{tribu engendrée par les } \mathcal{F}_n}_{\mathcal{F}_\infty}$

donc $X_\infty = \mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}_\infty)$

exemple : $\Omega = [0,1]$ $\mathcal{F}$: tribu borélienne P : mesure de Lebesgue

μ : mesure absolument continue $| P$

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right), 0 \leq i \leq 2^n - 1\right)$$

X v.a. de loi μ

$$M_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$$ M_n cv p.s et dans L^1 vers M_∞

$x \in \Omega = [0,1]$ $M_n(x)$ cv ps vers $M_\infty(x)$

$M_\infty : [0,1] \to \mathbb{R}$

Ici $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}$, $M_\infty = X$ p.s $\forall A \in \mathcal{F}$

$$\mu(A) = \int M_\infty(x) \mathbb{1}_A(x) dx = \int_A M_\infty(x) \, dx$$

M_∞ est la densité de μ : dérivée de Radon-Nikodym