1^{ere} Année-Diplôme d'ingénieur
TD 3

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire absolument continue de loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$. C'est à dire : la densité de probabilité $f(x)$, de la loi de X, est définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

1/ Détermer la fonction de répartition $F(x)$ de la variable aléatoire X.
2/ Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ et la variance de la variable aléatoire X.

Exercice 2. Soit une V.A.R de loi uniforme sur $]-1, 1[$.
1/ Déterminer la loi de $Y = |X|$.
2/ Déterminer la loi de $Y = \frac{1}{2} \log \frac{1+X}{1-X}$.

Exercice 3.

A. Soit la fonction $\Gamma(t)$ du paramètre réel positif t définie par :

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

a- Démontrer que $\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1) \quad \forall t \geq 1$.

b- En déduire la valeur de $\Gamma(t)$ lorsque $t \in \mathbb{N}^*$

B. Soit la fonction $f_t(x)$ de la variable rélle x définie par :

$$f_t(x) = \begin{cases} kx^{t-1}e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

a- Déterminer en fonction du paramètre t la valeur de la constante k pour que $f_t(x)$ soit une densité de probabilité.

b- k ayant la valeur trouvée; Soit X la Variable aléatoire absolument continue admettant $f_t(x)$ comme densité de probabilité. On dit que X suit une loi gamma de paramètre t, $(t > 0)$: $\mathcal{L}(X) = \gamma(t)$. Calculer $\mathbb{E}(X_t)$ et $V(X_t)$ en fonction de t.

c- En posant $X = aY$, où a est un paramètre strictement positif. On obtient pour Y une loi gamma de paramètres t et a notée $\gamma(t, a)$. Déterminer l'espérance la variance la fonction de répartition et la densité de la v.a. Y en fonction des paramètres t et a.

Exercice 4. Soit X la variable aléatoire absolument continue admettant comme densité de probabilité la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(s,t)} x^{s-1}(1-x)^{t-1} & \text{si} \quad 0 < x < 1;\ s > 0 \text{ et } t > 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

où $B(s,t) = \dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$ Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

Exercice 5. Soit θ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
1/ Déterminer la fonction de répartition et la densité de la variable $X = \text{tg}\ \theta$. On dit que X suit la loi de Cauchy.
2/ L'espérance de X est elle finie.

Exercice 6 : Pour $r > 0,\ \ \alpha > 0$, on considère la loi de Pareto dont la densité :

$$f_{r,\alpha}(x) = \frac{\alpha r^\alpha}{x^{\alpha+1}} 1_{\{x>r\}}.$$

Calculer sa moyenne et sa variance si elles existent.

Exercice 7 : Lois du sup et de l'inf
Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables indépendantes de même densité f; on pose
$U = \inf_{1\leq p\leq n} X_p,\ \ V = \sup_{1\leq p\leq n} X_p$.
a) Calculer les lois de U et V.
c) Calculer la probabilité que n points choisis au hasard dans [0,1], tombent dans un même intervalle de longueur t ($0 \leq t < 1$).

Exercice 8 : Convergence dominée

- Montrer que $\forall \alpha > 0$, la fonction $f(x) = \exp(-x) x^{\alpha-1}$ est intégrable sur $]0, \infty[$ et que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n x^{\alpha-1} dx = \int_0^\infty \exp(-x) x^{\alpha-1} dx.$$

- Soit $\alpha > 1$, montrer que $\forall x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| \frac{nx \sin x}{1 + n^\alpha x^\alpha} \right| \leq 1$$

  En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{nx \sin x}{1 + n^\alpha x^\alpha} dx = 0.$

- Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1 + n^2 x^2} dx = 0.$$

- Trouver la limite de

$$\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}dx$$

Exercice 8 : convergence monotone
Calculer $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}dx.$

Exercice 9 : Intégrales dépendant d'un paramètre
On considère la fonction

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\cos^2 t}{t^2+x^2}dt, \quad x > 0.$$

1/ Etudier la continuité et la dérivabilité de F.
2/ Etudier les limites de $F(n)$ et de $F(\frac{1}{n})$ quand n tend vers l'infini.
3/ Tracer le graphe de$F$.

Exercice 10 : Inégalité exponentielle
Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables indépendantes et de même loi définie par:

$$P(X_j = 1) = P(X_j = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose: $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
a) Montrer que

$$P(S_n \geq a) \leq \exp -axE(\exp xS_n), \quad \forall a, x \geq 0.$$

b) démontrer l'inégalité ch$x \leq \exp \frac{x^2}{2}$ et déduire de a) que

$$P(S_n \geq a) \leq \exp \frac{-a^2}{2n}.$$

c) En déduire que presque sûrement $\underline{\lim}_{n\to\infty}(2n\log n)^{-\frac{1}{2}}S_n \leq 1$.

Exercice 11 : Inégalité de type Tchebyschev
Soient X une variable aléatoire réelle quelconque définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et g une fonction réelle positive croissante définie sur R^+. Montrer que:

$$P(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{E(g(|X|))}{g(\epsilon)}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

En déduire l'inégalité de Tchebyschev.

Exercice 12 : Comparaison de convergences(Borel-Cantelli).
Soit $Z_1, \ldots, Z_n$ une suite de variables indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que

$$P(Z_j = 1) = \frac{1}{j} \;\; P(Z_j = 0) = 1 - \frac{1}{j}, \quad \forall j > 0.$$

a) Montrer que la suite (Z_j) converge vers 0 en probabilité.
b) En considérant

$$E = \{\omega \in \Omega, \;\; Z_j(\omega) = 1, \text{ pour une infinité de j}\},$$

montrer que Z_j ne converge pas ps vers 0.
c) Reprendre les questions posées en a) et b) en remplaçant $\frac{1}{j}$ par $\frac{1}{j^\alpha}$.

Exercice 13 : Inégalité de Holder
Soient U et V des variables aléatoires telles que les variables $e^U, \;\; e^V$ possèdent une espérance. Soit $t \in [0,1]$, montrer l'inégalité:

$$\frac{e^{tU}}{(E\; e^U)^t}\frac{e^{(1-t)V}}{(E\; e^V)^{1-t}} \leq t\frac{e^U}{E\; e^U} + (1-t)\frac{e^V}{E\; e^V}.$$

En déduire:

$$E\{e^{tU}e^{(1-t)V}\} \leq (E\; e^U)^t(E\; e^V)^{1-t}.$$

Soient p et q des réels positifs tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$. Soient X et Y des variables aléatoires telles que les variables $|X|^p, \;\; |Y|^q$ possèdent une espérance. Déduire de ce qui précède l'inégalité de Holder:

$$E|XY| \leq (E|X^p|)^{\frac{1}{p}}(E|Y^q|)^{\frac{1}{q}}.$$

Exercice 14 : Inégalité de Jensen
Soient ψ une fonction convexe définie sur R et X une variable aléatoire intégrable telle que la variable $\psi(X)$ soit aussi intégrable. Montrer que:

$$\psi(E(X)) \leq E\psi(X).$$