MACS3, Master Mathématiques et Informatiques, Université Paris13
Calcul stochastique et applications à la finance (2011-2012)

Feuille d'exercices 2

Exercice 1 *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus à accroissements indépendants et stationnaires nul en l'instant* 0 *et tel que, pour tout* t, $\mathbb{E}(X_t^2) < +\infty$. *On supposera, de plus, que la fonction* $t \mapsto \mathbb{E}(X_t^2)$ *est continue. Démontrer que* $E(X_t) = ct$ *et que* $Var(X_t) = c't$, c *et* c' *étant des constantes.*

Indication *: Vérifier la propriété suivante. Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *continue. Alors* $f(t+s) = f(t) + f(s), \forall s, t \geq 0$ *si et seulement si il existe* $c \in \mathbb{R}$ *avec* $f(t) = ct$.

Exercice 2 *On définit un pont Brownien par :*

$$Z_t = W_t - tW_1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

1. *Montrer que* Z *est un processus gaussien indépendant de* W_1. *Préciser sa loi, c'est à dire sa moyenne et sa fonction de covariance.*
2. *Montrer que le processus* $\tilde{Z}$ *avec* $\tilde{Z}_t = Z_{1-t}$ *a même loi que* Z.
3. *Monter que le processus* Y *avec* $Y_t = (1-t)W_{\frac{t}{1-t}}, \ \ 0 < t < 1$ *a même loi que* Z.

Exercice 3 *Comportement limite*

1. *Montrer que* $\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t}$ *dans* L^2 *est égale à* 0.
2. *Montrer que* $Y_t = tW_{1/t}$, $t > 0$, $Y_0 = 0$ *, est un mouvement brownien standard (on étudiera en particulier la continuité en zéro).*
3. *En déduire le résultat suivant (loi des grands nombres pour un mouvement brownien standard) :*
$$p.s., \ \lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0$$
4. *Montrer que p.s., l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{W_s}{s} ds$ *est convergente.*

Exercice 4 *Soit* $(W_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien standard. Pour* $t > 0$, *posons :*

$$Y_n = \sum_{i=1}^{2^n} |W_{i\frac{t}{2^n}} - W_{(i-1)\frac{t}{2^n}}|.$$

1. *Montrer que* $\mathbb{E}(Y_n) = 2^{\frac{n}{2}}\sqrt{t}E(|W_1|)$ *et* $Var(Y_n) = tVar(|W_1|)$.
2. *En déduire que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{Y_n < n\} < \infty$ *et conclure que p.s. les trajectoires de* W *ne sont pas à variation bornée sur* $[0, t]$.

Exercice 5 *Calcul d'espérances*

1. *Calculer pour* $s < t$ *les quantités* $\mathbb{E}(W_s W_t^2)$, $\mathbb{E}(W_t|\mathcal{F}_s)$ *et* $\mathbb{E}(W_t|W_s)$.
2. *On rappelle que si* Z *est une v. a. gausssienne centrée de variance* σ^2, *on a* $\mathbb{E}(Z^4) = 3\sigma^4$. *Calculer* $\mathbb{E}(W_t^2 W_s^2)$.
3. *Quelle est la loi de* $W_t + W_s$ *?*
4. *Soit* θ_s *une v.a. bornée* $\mathcal{F}_s$*-mesurable. Calculer pour* $t \geq s$, $\mathbb{E}[\theta_s(W_t - W_s)]$ *et* $\mathbb{E}[\theta_s(W_t - W_s)^2]$.
5. *Calculer* $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{W_t \leq a\}})$ *et* $\mathbb{E}(W_t \mathbf{1}_{\{W_t \leq a\}})$.
6. *Calculer* $\mathbb{E}(\int_0^t \exp(\gamma W_s) ds)$ *et* $\mathbb{E}(\exp(\alpha W_t) \int_0^t \exp(\gamma W_s) ds)$.

Exercice 6 *Soit* $(M_t)_{t \geq 0}$ *une martingale, telle que pour tout* t, $\mathbb{E}(M_t^2) < +\infty$. *Démontrer que si* $s \leq t$ *:*

$$\mathbb{E}\left((M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s).$$

Exercice 7 *Parmi les processus suivants, quelles sont ceux qui sont des martingales. (On pourra utiliser, sans démonstration, que* $\mathbb{E}[\int_0^t W_u \, du | \mathcal{F}_s] = \int_0^t \mathbb{E}[W_u | \mathcal{F}_s] du$*).*

1. $M_t = W_t^3 - 3\int_0^t W_s \, ds$,
2. $Z_t = W_t^3 - 3tW_t$,
3. $X_t = tW_t - \int_0^t W_s \, ds$,
4. $U_t = \sin(W_t) + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(W_s) \, ds$,
5. $Y_t = t^2 W_t - 2\int_0^t W_s \, ds$.