MACS3, Master Mathématiques et Informatiques, Université Paris13
Calcul stochastique et applications à la finance (2011-2012)

Feuille d'exercices 4

Exercice 1 *Cet exercice est une introduction à l'intégrale stochastique. Il s'agit de construire une intégrale de type* $\int_0^{+\infty} f(s)dW_s$*, où* $(W_t)_{t\geq 0}$ *est un* $\mathcal{F}_t$*-mouvement brownien standard et* $f(s)$ *est une fonction mesurable de* $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *telle que* $\int_0^{+\infty} f^2(s)ds < +\infty$*. Ce type d'intégrale s'appelle intégrale de Wiener et c'est un cas particulier de l'intégrale d'Itô qui est introduite au Cours.*
On rappelle que l'ensemble $\mathcal{H}$ *des fonctions de la forme* $\sum_{0\leq i\leq N-1} b_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}$ *avec* $b_i \in \mathbb{R}$*, et* $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_N$ *est dense dans* $L^2(\mathbb{R}^+, dx)$ *muni de la norme* $||f||_{L^2} = \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(s)ds}$*.*

1. *Soit* $b_i \in \mathbb{R}$*, et* $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_N$*, et* $f = \sum_{0\leq i\leq N-1} b_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}$*. On pose :*

$$I_e(f) = \sum_{0\leq i\leq N-1} b_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

   Démontrer que $I_e(f)$ *est une variable aléatoire gaussienne dont on calculera la moyenne et la variance. Démontrer en particulier que :*

$$\mathbb{E}(I_e(f)^2) = ||f||^2_{L^2}.$$

2. *En déduire qu'il existe une unique application linéaire de* $L^2(\mathbb{R}^+, dx)$ *à valeurs dans* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*,* I*, telle que* $I(f) = I_e(f)$*, si* f *est dans* $\mathcal{H}$ *et* $\mathbf{E}(I(f)^2) = ||f||_{L^2}$*, pour tout* f *dans* $L^2(\mathbb{R}^+)$*.*
3. *Démontrer que, si* $(X_n)_{n\geq 0}$ *est une suite de variables aléatoires gaussiennes centrées qui convergent dans* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vers* X*, alors* X *est une variable aléatoire gaussienne centrée. En déduire que si* $f \in L^2(\mathbb{R}^+, dx)$ *alors* $I(f)$ *est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance* $\int_0^{+\infty} f^2(s)ds$*.*
4. *Soit* $f \in L^2(\mathbb{R}^+, dx)$*. Notons* $\int_0^\infty f(s)dW_s = I(f)$ *et*

$$Z_t = \int_0^t f(s)dW_s = \int_0^\infty \mathbf{1}_{]0,t]}(s)f(s)dW_s.$$

   Démontrer que Z_t *est un processus adapté à* $\mathcal{F}_t$*, et que* $Z_t - Z_u$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_u$ *si* $t \geq u$*. Commencer par traiter le cas* $f \in \mathcal{H}$*.*

5. *Démontrer que les processus* Z_t*,* $Z_t^2 - \int_0^t f^2(s)ds$*, et* $\exp\left(\lambda Z_t - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t f^2(s)ds\right)$*,* $\lambda \in \mathbb{R}$*, sont des* $\mathcal{F}_t$*-martingales.*

Exercice 2 *Espérance conditionelle*

1. *Calculer* $\mathbb{E}\left(\int_0^1 e^{-s}dW_s|W_1\right)$.
2. *Calculer* $\mathbb{E}\left(\int_0^2 e^{-s}dW_s)^3|\mathcal{F}_1\right)$.