Master Math-Info 1 ère année, Université Paris13
Processus stochastiques à temps discret (2009-2010)

Feuille d'exercices 4

Exercice 1 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration de $\mathcal{F}$. Les martingales et les sous martingales sont toujours définies relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

1. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous martingale intégrable.*

   (a) *On définit A_n par la formule : $A_0 = 0$,*

   $$A_{n+1} - A_n = \mathbb{E}\left(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n\right).$$

   Montrer que A_n est croissant et A_n est prévisible.

   (b) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_n = X_n - A_n$. Montrer que M_n est une martingale intégrable.*

   Le couple (M_n, A_n) s'appelle la décomposition de Doob de X_n et (A_n) le compensateur de X_n.

2. *Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \cdots, Y_n)$, $S_0 = 0$, et pour $n \geq 1$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Montrer que S_n est une martingale.*

3. *En déduire que S_n^2 est une sous martingale intégrable et calculer son compensateur. On remarque que ce compensateur est aussi le processus croissant associé à la martingale de carré intégrable S_n.*

4. *On note par $sign(x)$ la fonction $sign(x) = 1$ si $x > 0$, $sign(x) = -1$ si $x < 0$ et $sign(0) = 0$. On considère le processus $M_n = \sum_{k=1}^{n} sign(S_{k-1})Y_k$, $n \geq 1$ et $M_0 = 0$. Montrer que M_n est une martingale.*

5. *En déduire que M_n^2 et est une sous martingale intégrable, et calculer son compensateur. On remarque que ce compensateur est aussi le processus croissant associé à la martingale de carré intégrable M_n.*

6. *Evaluer $|S_{n+1}| - |S_n|$ sur $(S_n > 0)$, $(S_n = 0)$ et $(S_n < 0)$.*

7. *Montrer que $|S_n|$ est une sous martingale intégrable. Quelle est le compensateur de la sous martingale $|S_n|$.*