MASTER 1 2020-2021
ANALYSE HARMONIQUE APPLIQUÉE/TRAITEMENT DU SIGNAL

Feuille de TD 1
Transformée(s) de Fourier

1. Rappels de cours

Soit f une fonction continue périodique de période a échantillonnée sur $[0,a]$ par N échantillons (on suppose N pair)

1) Quelle est la période d'échantillonnage T_e.
2) On pose $y_k = f(ka/N)$ pour $k \in \{0,\dots,N-1\}$. Exprimer le vecteur transformée de Fourier discrète (TFD) $(Y_k)_{k\in\{0,\dots,N-1\}}$ de $(y_n)_{n\in\{0,\dots,N-1\}}$
3) Quel est le lien entre les coefficients de la TFD et ceux associés au polynôme :

$$p(t) := \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} c_n^N \exp\left(2i\pi n \frac{t}{a}\right)$$

si l'on veut que p interpole f aux points ka/N, pour $k \in \{0,\dots,N-1\}$?

4) montrer que la suite $(Y_p)_{p\in\{0,\dots,N-1\}}$ correspond à une integration approchée des coefficients de Fourier exacts $(c_p)_{p\in\{0,\dots,N-1\}}$ par une méthode des rectangles à gauche.
5) montrer que comme f est réelle, $Y_{-n} = \overline{Y}_n$ où $\overline{Y}_n$ désigne le conjugué de Y_n pour tout $n \in \mathbb{Z}$ dans l'hypothèse où l'on a périodicisé $(Y_n)_{n\in\{0,\dots,N-1\}}$ sur $\mathbb{Z}$, *i.e.* $Y_n = Y_{[n]_N}$ où $[n]_N$ est le reste de la division euclidienne de n par N.

2. Retard et transformée discrète

1) Calculer la TFD du signal $x(nT_e)_{n\in\{-2,\dots,1\}}$ suivant de période $4T_e$, avec

$$x(-2T_e) = 0, \quad x(-T_e) = 1, \quad x(0) = 1, \quad x(T_e) = 1$$

tracer le module et la phase du spectre.

2) Calculer la TFD du signal $y(nT_e)_{n\in\{-1,\dots,2\}}$ où

$$y(-T_e) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(T_e) = 1, \quad y(2T_e) = 1$$

3) Soient x et y deux signaux périodiques de période N tels qu'il existe $j \in \{0,\dots,N-1\}$ tel que $x_{n+j} = y_n$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Que peut-on dire des TFD associées $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ à x et y respectivement.
4) Comparer les TDF de x du 1) et de y du 2) par rapport aux conclusions de la question 3).

3. Un signal périodique analogique

On considère le signal $x(t) = \cos(4\pi t) + \cos(8\pi t)$.

1. Quelle est la période a du signal ?
2. Dessiner le spectre energie-fréquence de ce signal

3. Ecrire x comme un polynôme trigonométrique :

$$x(t) = \sum_{n\in\{-P,\dots,P\}} c_n \exp\left(2i\pi n\frac{t}{a}\right)$$

en prenant P le plus petit possible. Dans le cas général, montrer que la TFD calcule les coefficients exacts si $N \geq 2P+1$.

4. Pour x à partir de quel N les coefficients de la TFD sont ils exacts ? Donner la période d'échantillonage correspondante.

4. Transformée de Fourier continue et discrète
Calculer les coefficients de la série de Fourier et ceux de la TFD de la fonction

$$u(x) = 1-|x|, \quad \text{sur } [-1,1]$$

périodisée sur $\mathbb{R}$. Représenter sur un même graphique la somme partielle de Fourier et la TDF. Que remarquez-vous ?

5. On considère le signal défini par

$$\forall t\in\mathbb{R}, \quad x(t) = \exp\left(2i\pi(\lambda t+\varphi)\right),$$

où $\lambda > 0$ et φ st la phase à l'origine.

1. Montrer que x est périodique et calculer sa période notée a.

2. Calculer la série de Fourier de x. Tracer le spectre énergie-fréquence.

3. On se donne N échantillons de x, $x_k := x(ka_e)$, pour $k \in \{0,\dots,N-1\}$ où a_e est la période d'échantillonnage $a_e = a/N$. Calculer X la TFD de x.

4. Soit la fonction de $\theta\in\mathbb{R}$ définie par

$$Y_N(\theta) := \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp\left(-2i\pi\frac{k}{N}\theta\right)$$

En utilisant les sommes de Riemann, calculer la limite quand N tend vers l'infini de Y_N.

5. En utilisant la régularité de la limite donner une estimation d'erreur

6. Etant donné un signal caractérisé par les propriétés suivantes:

1. $x(t)$ est réel et impair

2. $x(t)$ est périodique de période a

3. $X(k) = 0$ pour $|k| > 1$ où X est la TFD de x

4. $\frac{1}{a}\int_0^a x^2(t)dt = 1$,

trouvez deux signaux qui satisfont ces propriétés.