Feuille de TD 2
Echantillonnage

1. Rappels de cours

1. Montrer que si la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est à croissance lente alors la distribution
$$T_y := \sum_{k\in\mathbb{Z}} y_k \delta_{ka}$$
est tempérée.
2. Montrer que T_y est périodique et calculer sa période.
3. Montrer la réciproque si T_y définie comme précédemment est tempérée alors $(y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est à croissance lente
4. Donner un exemple de distribution périodique qui ne soit pas localement intégrable.

2. Trois notes de musique

On génère un son comportant deux composantes audibles (sinusoïdes) : deux fréquences pures à 1 000 Hz et 3 000 Hz ainsi qu'une composante à 43 500 Hz. (Cette dernière composante est inaudible, car l'oreille humaine n'entend pas les sons au-delà d'une fréquence de 20 000 Hz environ). On échantilonne à $f_e = 44100$ Hz (soit une qualité CD).

1. Sommes-nous dans les hypothèses du théorème d'échantillonnage ?
2. Représenter le spectre après échantillonnage du signal.
3. Quelles sont les fréquences présentes ?
4. Ecrire la TFD de ce signal avec la fréquence d'échantillonnage donnée. Que retrouve-t-on ?

TP Ecrire le code python qui permet d'illustrer cet exercice. Avec les programmes fournis générer le fichier son correspondant.

3. Fonction plateau et sinc

Soit f un signal défini sur $\mathbb{R}$ tel que sa transformée de Fourrier soit $\hat{f}$ définie par
$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Que peut-on dire du support de f ?
2. Calculer f et donner une allure de son graphe

3. Calculer l'énergie totale de f

4. On suppose f est échantillonnée aux instants na avec $n \in \mathbb{Z}$, on appelle g le signal échantillonné. Exprimer $\hat{g}$. Dessiner son graphe lorsque $a = 1/3$ et $a = 2/3$. Que remarquez vous ?

TP Illustrer cet exemple numériquement.