MASTER 1 2019-2020

ANALYSE HARMONIQUE APPLIQUÉE/TRAITEMENT DU SIGNAL

Feuille de TD 3

Filtres analogiques

1. Rappels de cours

1. Rappeler ce qu'est un filtre
2. Rappeler la définition de causalité
3. Quelle est la condition suffisante pour qu'un filtre soit une convolution

2. Le circuit RLC

On considère l'équation différentielle associée à ce circuit, qui s'écrit de manière compacte :

$$LCy''(t) + RCy'(t) + y(t) = x(t) \tag{1}$$

si x est le signal d'entrée (qui représente une tension) et y le signal de sortie.

1. En supposant que $x \in \mathscr{S}$ et que $y \in \mathscr{S}$ également, construire les polynômes P et Q correspondant à l'équation (1) à laquelle on a appliqué la transformée de Fourier.
$$Q(2i\pi\lambda)\hat{y} = P(2i\pi\lambda)\hat{x}$$
2. Etudier les racines de Q.
3. Distinguer les différents cas et calculer la fonction de transfert dans chaque cas.
4. Existe-t-il dans chaque cas un h tel que $y = h \star x$ tel que y soit solution de (1) ? Si oui quel est le lien avec la fonction de transfert H?
5. La cellule RLC ainsi définie est-elle un filtre ? Est-elle stable ?
6. Donner dans chaque cas la réponse indicielle.

3. Un exemple du cours

On se propose d'étudier l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = x(t), \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

1. Transformer ce problème en un système du premier ordre
2. Diagonaliser ce dernier
3. Ecrire les équations satisfaites par les composantes diagonlisées.
4. Retrouver la formule de Duhamel dans le cours avec l'expression explicite de la matrice exponentielle.
5. Démontrer que cet opérateur n'envoie pas les fonctions à décroissance rapide $\mathscr{S}$ dans elles-mêmes.
6. Demontrer que l'opérateur qui à x associe la solution de (2) est causal.

7. Peut-on écrire y comme une convolution $y = h \star x$? Si oui, donner h.

4. Synthèse

Prenons maintenant la solution y_ε du problème (1) avec pour constantes

$$R = \varepsilon/\omega, \quad L = C = \frac{1}{\omega}.$$

où ω une constante non-nulle réelle fixée et $\varepsilon < 2\omega$ est un petit paramètre positif.

1. Ecrire l'équation différentielle correspondante.
2. Calculer la fonction de transfer H_ε correspondante.
3. Donner le noyau de convolution h_ε qui définit le filtre.
4. Que se passe-t-il quand le paramètre ε devient petit. Formellement vers la solution de quel problème tend y_ε quand ε tend vers 0
5. Montrez qu'en fait cette convergence a lieu dans $\mathscr{S}'$.
6. Montrez que
$$\frac{1}{x+i\varepsilon} \to \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta_0 \text{ dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R})$$
quand ε tend vers 0, avec $\mathrm{vp}(1/x)$ qui désigne la valeur principale de $1/x$.
7. Que peut-on conclure quand à la limite H_0 de H_ε quand ε tend vers zéro ?
8. Quel lien y-a-t-il entre $\hat{h}_0$, H_0 et la transformée de Fourier de l'équation (2) ?