Feuille de TD 4
Filtres discrets

1. Question de cours

1. On pose $\mathbf{x} := (x_n)_{x\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes à croissance lente. Montrer que si le signal est causal ($\exists k_0$ t.q. $\forall k < k_0,\ x_k = 0$) alors si $X(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n z^{-n}$ est la transformée en z de $\mathbf{x}$, si $|z| > 1$, $X(z)$ converge absolument.
2. Que représente $X(\exp(2i\pi\lambda a))$?
3. Montrer que si $X(z)$ est la transformée en z de $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, alors $\tau_1\mathbf{x}$ a pour transformée $z^{-1}X(z)$, calculer aussi la transformée en z de $\tau_k\mathbf{x}$ où $\tau_k\mathbf{x} = (x_{n-k})_{n\in\mathbb{Z}}$.

2. Le circuit RLC

On discrétise l'équation du second ordre associée au circuit *RLC* avec un schéma d'Euler implicite :

$$LC\frac{(y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2})}{a^2} + RC\frac{(y_n - y_{n-1})}{a} + y_n = x_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

1. Mettre l'équation sous la forme
$$\sum_{k=0}^{q} b_k y_{n-k} = \sum_{j=0}^{p} a_j x_{n-j}$$
2. Calculer en fonction des coefficients R,L, C et a
   - la fonction de transfert H associée au schéma
   - les pôles de H
   - h le noyau de convolution discrète associé
3. Montrer que le filtre est stable indépendamment de a.

On change maintenant de discrétisation et on utilise une schéma de type Euler explicite :

$$LC\frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{a^2} + RC\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{a} + y_{n-2} = x_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

4. Reprendre les questions précédentes
5. Que peut-on dire quant à la stabilité du schéma en fonction de a ?

TP Pour finir on va essayer d'appliquer les outils développés tout au long des séances pour traiter un signal sonore.

(a) Coder les deux schémas RLC et comparer les solutions.
(b) Utiliser les extraits de code disponibles sur la page web pour
    i) Générer un signal sinusoïdal bruité
    ii) Le sauver sous format `wav`
    iii) Ecrire un programme qui ouvre le fichier, extrait le signal, y applique des filtres RLC, fenêtre glissante, etc, qui sauvegarde le résultat sous forme `wav`

iv) Peut-on entendre la différence entre les signaux d'entrée et de sortie ? Discuter la réponse suivant le bruit

3. Exemple d'échantillonnage
Soit le signal $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ défini par

$$\mathbf{x} = \begin{cases} \beta^{-an} & \text{si } n \leq 0 \\ \alpha^{an} & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

où α et β sont des nombres complexes de module strictement inférieur à 1. Calculer la transformée en z du signal $\mathbf{x}$. Quelle est sa couronne de convergence dans $\mathbb{C}$?

4. Filtre discret du premier ordre
On considère le système discret donné par

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad y_k = a y_{k-1} + x_k, \quad a \neq 0 \tag{1}$$

1. Grâce à un changement d'inconnues $v_k = a^{-k} y_k$ montrer que l'on obtient :

$$y_k - y_{k-p} = \sum_{\ell=k-p+1}^{k} a^{k-\ell} x_\ell$$

2. On suppose que $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient à $\mathscr{C} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\sum_{n\leq 0} a^{-n} x_n$converge absolument$\}$. Montrez que $\mathbf{v} := (v_k)_{\{k\in\mathbb{Z},\, k\leq 0\}}$ est de Cauchy.

3. En conclure qu'il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad y_k = a^k b + \sum_{n\leq k} a^{k-n} x_n$$

4. Réciproquement montrez que toute solution de la forme précédente satisfait aussi la relation de récurrence (1)

5. On suppose que si l'entrée est nulle la sortie est nulle. Que vaut alors b ?

6. Montrez que si on pose

$$\mathbf{h} := \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ a^n & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

alors la solution y est une convolution discrète. Monter que le système est linéaire, invariant et réalisable.

7. Montrer que si $|a| < 1$, le système est continu pour la norme uniforme

8. On choisit une entrée exponenetielle $\mathbf{x} = (z^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ où z est un nombre complexe tel que $|z| > |a|$. Montrer que

$$y_k = \frac{z}{z-a} x_k$$

9. Que vaut la fonction de transfert du filtre considéré ?