

# Lois de paroi d'ordre élevé pour un écoulement de Poiseuille dans un canal rugueux

Didier Bresch   Vuk Milišić

UMR UJF-CNRS 5523  
Laboratoire de Modélisation et Calcul  
Institut des Mathématiques Appliquées de Grenoble  
France

24 octobre 2006

- 1 Introduction
  - Description du problème
  - Objectifs et références
  - La théorie de Jäger et Mikelić
  - L'approche d'Achdou *et al.*
- 2 Lien entre Jäger *et al* et Achdou *et al*
- 3 Approximation d'ordre élevé
  - Approximation d'ordre un exacte sur  $\Gamma^\epsilon$
  - Approximation d'ordre deux exacte sur  $\Gamma^\epsilon$
  - Lois de paroi micro-macro d'ordre élevé explicites
- 4 Loi de paroi micro-macro et implicite
  - Dérivation
  - Convergence
- 5 Validation numérique
  - Estimations d'erreur
  - Comparaisons qualitatives

Cardiatis®: conception et commercialisation de stents métalliques multi-couche [▶ Image 3D](#)

- Nouvelle technologie  
On contrôle
  - Le nombre de couches
  - Leur connectivité
- Les expériences *in vivo* sur les cochons-nains:

pas de **thrombus** → 6 mois

[▶ Images Dissections](#)

- Phénomène multi-échelle qui repose sur:
  - l'hémodynamique
  - les réactions chimiques entre le sang et les tissus des parois

Etude théorique & numérique de l'hémodynamique

# Description du problème

- Les propriétés géométriques du problème

- Diamètre de l'artère fémorale:  $\emptyset_A = 6mm$
- Epaisseur totale du stent:  $\epsilon = 0.25mm$
- Epaisseur d'une spire métallique:  $\epsilon = 0.04mm$
- Diamètre d'un globule rouge:  $\emptyset_{RC} = 0.008mm$

$$\frac{\epsilon}{\emptyset_A} = \frac{0.25}{6} \sim 4\%$$

Stent  $\sim$  paroi rugueuse **périodique** dans géométrie cylindrique rectiligne

- Le sang dans l'artère

- Ecoulement permanent établi:  
**profil de Poiseuille**
- Plus perturbation périodique du au pouls:  
perturbation par le **profil de Womersley**

- Première étape: Etude du profil de **Poiseuille rugueux**

On veut

- comprendre la dynamique des écoulements dans conduits rugueux
- éviter de discrétisation coûteuse de la paroi
- inclure les échelles microscopiques dans l'écoulement de Poiseuille macro

Donc **développements asymptotiques** adaptés pour les **frontières rugueuses**.



Jäger, W. and Mikelić, A.

On the interface boundary condition of Beavers, Joseph, and Saffman.  
SIAM J. Appl. Math. 2000



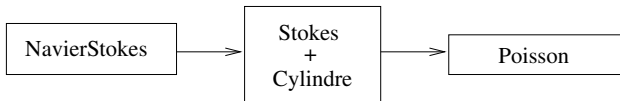
Achdou, Y. and Le Tallec, P. and Valentin, F. and Pironneau, O.

Constructing wall laws with domain decomposition or asymptotic expansion techniques

Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1998

# Le problème simplifié

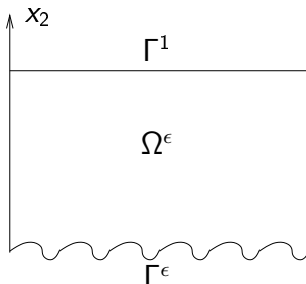
- Écoulement: **laminaire** *a priori*



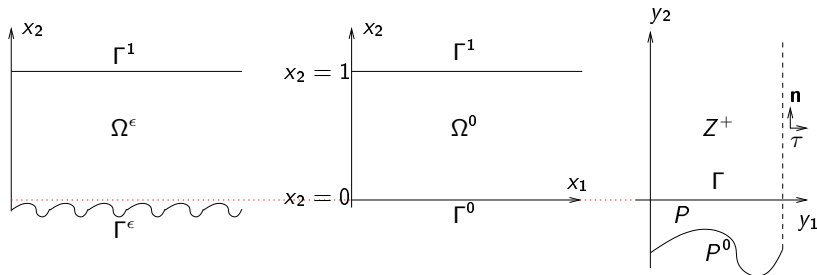
- Le problème simplifié

$$\begin{cases} -\Delta u = C, & \forall x \in \Omega^\epsilon, \\ u = 0, & \forall x \in \Gamma^\epsilon \cup \Gamma^1, \end{cases}$$

$u$  est la composante axiale  
de la vitesse



- $C$  représente  $-\nabla p$  du problème de Stokes



Approx. par correcteurs couche limite (CCL): plusieurs étapes

- Approximation macro ordre zero: écoulement de Poiseuille dans  $\Omega^0$
- Corr. couche limite premier ordre: échelle micro. dans  $Z^+ \cup P$
- Corr. couche limite premier ordre: échelle macro. dans  $\Omega^\epsilon$

A ce stade: erreur formelle en  $O(\epsilon)$ .

- Le profil de Poiseuille

$$u^0 = \begin{cases} \frac{C}{2} (1 - x_2) x_2, & \forall x \in \Omega^0, \\ 0, & \forall x \in \Omega^\epsilon \setminus \Omega^0 \end{cases}$$

Saut du gradient dans la direction normale à  $\Gamma^0$

- Le correcteur couche limite (CCL) s'en charge

$$\begin{cases} -\Delta\beta = 0, & \forall y \in Z^+ \cup P, \\ \left[ \frac{\partial\beta}{\partial x_2} \right] = 1, & \forall y \in \Gamma, \\ \beta = 0, & \forall y \in P^0, \\ \beta \text{ periodic in } y_2 \end{cases}$$

- Mais  $\beta \rightarrow \bar{\beta}$  quand  $y_2 \rightarrow +\infty$  on rajoute  $\bar{\beta}\chi_{\{y_2>0\}}$

$$u_J^{1,1} = u^0 \chi_{[\Omega^0]}$$



- Le profil de Poiseuille

$$u^0 = \begin{cases} \frac{C}{2} (1 - x_2) x_2, & \forall x \in \Omega^0, \\ 0, & \forall x \in \Omega^\epsilon \setminus \Omega^0 \end{cases}$$

Saut du gradient dans la direction normale à  $\Gamma^0$

- Le correcteur couche limite (CCL) s'en charge

$$\begin{cases} -\Delta \beta = 0, & \forall y \in Z^+ \cup P, \\ \left[ \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \right] = 1, & \forall y \in \Gamma, \\ \beta = 0, & \forall y \in P^0, \\ \beta \text{ periodic in } y_2 \end{cases}$$

- Mais  $\beta \rightarrow \bar{\beta}$  quand  $y_2 \rightarrow +\infty$  on rajoute  $\bar{\beta} \chi_{\{y_2 > 0\}}$

$$u_J^{1,1} = u^0 \chi_{[\Omega^0]} + \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} \left( \beta \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \right)$$

- Le profil de Poiseuille

$$u^0 = \begin{cases} \frac{C}{2} (1 - x_2) x_2, & \forall x \in \Omega^0, \\ 0, & \forall x \in \Omega^\epsilon \setminus \Omega^0 \end{cases}$$

Saut du gradient dans la direction normale à  $\Gamma^0$

- Le correcteur couche limite (CCL) s'en charge

$$\begin{cases} -\Delta \beta = 0, & \forall y \in Z^+ \cup P, \\ \left[ \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \right] = 1, & \forall y \in \Gamma, \\ \beta = 0, & \forall y \in P^0, \\ \beta \text{ periodic in } y_2 \end{cases}$$

- Mais  $\beta \rightarrow \bar{\beta}$  quand  $y_2 \rightarrow +\infty$  on rajoute  $\bar{\beta} \chi_{\{y_2 > 0\}}$

$$u_J^{1,1} = u^0 \chi_{[\Omega^0]} + \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} \left( \beta \left( \frac{x}{\epsilon} \right) - \bar{\beta} \chi_{\{x_2 > 0\}} \right)$$

$$u_J^{1,1} = u^0 \chi_{[\Omega^0]} + \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} (\beta - \bar{\beta} \chi_{\{x_2 > 0\}})$$

- Mais cette approximation est discontinue on  $\Gamma^0$ :

$$u_J^{1,1} = u^0 \chi_{[\Omega^0]} + \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} (\beta - \bar{\beta} \chi_{\{x_2 > 0\}}) + \bar{\beta} \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} (1 - x_2) \chi_{\{x_2 > 0\}}$$

- Mais cette approximation est discontinue on  $\Gamma^0$ :  
ajout de  $d$ , le “contre-flot” solution de

$$\begin{cases} -\Delta d = 0, & \forall x \in \Omega^0, \\ d = 0, & \forall x \in \Gamma^1, \\ d = 1, & \forall x \in \Gamma^0 \end{cases}$$

$$u_J^{1,1} = u^0 \chi_{[\Omega^0]} + \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} (\beta - \bar{\beta} x_2 \chi_{\{x_2 > 0\}})$$

- Mais cette approximation est discontinue on  $\Gamma^0$ :  
ajout de  $d$ , le “contre-flot” solution de

$$\begin{cases} -\Delta d = 0, & \forall x \in \Omega^0, \\ d = 0, & \forall x \in \Gamma^1, \\ d = 1, & \forall x \in \Gamma^0 \end{cases}$$

L'erreur sur le saut est formellement d'ordre  $O(\epsilon)$ .

On se donne:

- l'erreur d'ordre zero  $W^0 = u^\epsilon - u^0$

$$\|W^0\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq \sqrt{\epsilon}$$

$$\|W^0\|_{L^2(\Omega^0)} \leq \epsilon$$

- l'erreur au premier ordre  $W^1 = u^\epsilon - u^{1,1}$

$$\|W^1\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq \epsilon$$

$$\|W^1\|_{L^2(\Omega^0)} \leq \epsilon^{\frac{3}{2}}$$

On se donne:

- l'erreur d'ordre zero  $W^0 = u^\epsilon - u^0$

$$\|W^0\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq \sqrt{\epsilon}$$

$$\|W^0\|_{L^2(\Omega^0)} \leq \epsilon$$

- l'erreur au premier ordre  $W^1 = u^\epsilon - u^{1,1}$

$$\|W^1\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq \epsilon$$

$$\|W^1\|_{L^2(\Omega^0)} \leq \epsilon^{\frac{3}{2}}$$

On se donne:

- l'erreur d'ordre zero  $W^0 = u^\epsilon - u^0$

$$\|W^0\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq \sqrt{\epsilon}$$

$$\|W^0\|_{L^2(\Omega^0)} \leq \epsilon$$

- l'erreur au premier ordre  $W^1 = u^\epsilon - u^{1,1}$

$$\|W^1\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq \epsilon$$

$$\|W^1\|_{L^2(\Omega^0)} \leq \epsilon^{\frac{3}{2}}$$

Les preuves reposent sur

- Les estimations *a priori* de base sur  $\Omega^\epsilon$
- Poincaré sur  $\Omega^\epsilon \setminus \Omega^0$
- Le problème adjoint sur  $\Omega^0$



Réécriture de la solution comme somme de composantes

- macroscopiques ( $\rightarrow$  variables lentes)
- microscopiques ( $\rightarrow$  variables rapides)

$$u_j^{1,1} = u^0 \chi_{[\Omega^0]} + \bar{\beta} \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} (1 - x_2) \chi_{\{x_2 > 0\}}$$

Réécriture de la solution comme somme de composantes

- macroscopiques ( $\rightarrow$  variables lentes)
- microscopiques ( $\rightarrow$  variables rapides)

$$u_j^{1,1} = u^0 \chi_{[\Omega^0]} + \bar{\beta} \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} (1 - x_2) \chi_{\{x_2 > 0\}} + \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} (\beta - \bar{\beta} \chi_{\{x_2 > 0\}})$$

Réécriture de la solution comme somme de composantes

- macroscopiques ( $\rightarrow$  variables lentes)
- microscopiques ( $\rightarrow$  variables rapides)

$$u_j^{1,1} = u^0 \chi_{[\Omega^0]} + \bar{\beta} \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} (1 - x_2) \chi_{\{x_2 > 0\}} + \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} (\beta - \bar{\beta} \chi_{\{x_2 > 0\}})$$

On moyenne sur une période de la variable rapide :

$$u^1 \equiv \overline{u_j^{1,1}} = u^0 \chi_{[\Omega^0]} + \bar{\beta} \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} (1 - x_2) \chi_{\{x_2 > 0\}}$$

Réécriture de la solution comme somme de composantes

- macroscopiques ( $\rightarrow$  variables lentes)
- microscopiques ( $\rightarrow$  variables rapides)

$$u_j^{1,1} = u^0 \chi_{[\Omega^0]} + \bar{\beta} \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} (1 - x_2) \chi_{\{x_2 > 0\}} + \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} (\beta - \bar{\beta} \chi_{\{x_2 > 0\}})$$

On moyenne sur une période de la variable rapide :

$$u^1 \equiv \overline{u_j^{1,1}} = u^0 \chi_{[\Omega^0]} + \bar{\beta} \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} (1 - x_2) \chi_{\{x_2 > 0\}}$$

et  $u^1$  résout le pbm macro :

$$\begin{cases} -\Delta u^1 = C, & \forall x \in \Omega^0, \\ u^1 = \epsilon \bar{\beta} \frac{\partial u^1}{\partial x_2} + 0(\epsilon^2), & \forall x \in \Gamma^0, \\ u^1 = 0, & \forall x \in \Gamma^1, \end{cases}$$

## Résultats de convergence

$$\begin{aligned}\|u^\epsilon - u^1\|_{L^2(\Omega^0)} &\leq \|u^\epsilon - u_J^{1,1}\|_{L^2(\Omega^0)} + \|u^{1,1} - u^1\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|W^1\|_{L^2(\Omega^0)} + \epsilon K \|\beta - \bar{\beta}\|_{L^2(\Omega^0)} \\ &\leq K\epsilon^{\frac{3}{2}} + K'\epsilon^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Parce que

$$\|\beta - \bar{\beta}\|_{L^2(\Omega^0)} \leq \epsilon^{\frac{1}{2}}$$

## Extension linéaire dans la région rugueuse

$$u^0 = \left[ \frac{C}{2} (1 - x_2) x_2 \right] \chi_{[\Omega^0]} + \left[ \frac{\partial u^0}{\partial x_2} x_2 \right] \chi_{\Omega^\epsilon \setminus \Omega^0}$$

- Pas besoin de corrections du saut de  $\nabla u$  à travers  $\Gamma^0$   
 $\implies$  mais corriger  $u$  sur la frontière  $\Gamma^\epsilon$
- Résolution du problème cellule

$$\begin{cases} -\Delta \beta = 0, & \forall y \in Z^+ \cup P, \\ \beta = -y_2, & \forall y \in P^0, \end{cases}$$

- Résultats numériques pour NS stationnaire
- Pas de différence entre lois de paroi du premier et du second ordre

$$u_A^{1,1} = u^0 \chi_{[\Omega^0]} + \left[ \frac{\partial u^0}{\partial x_2} x_2 \right] \chi_{\Omega^\epsilon \setminus \Omega^0}$$

## Extension linéaire dans la région rugueuse

$$u^0 = \left[ \frac{C}{2} (1 - x_2) x_2 \right] \chi_{[\Omega^0]} + \left[ \frac{\partial u^0}{\partial x_2} x_2 \right] \chi_{\Omega^\epsilon \setminus \Omega^0}$$

- Pas besoin de corrections du saut de  $\nabla u$  à travers  $\Gamma^0$   
 $\implies$  mais corriger  $u$  sur la frontière  $\Gamma^\epsilon$
- Résolution du problème cellule

$$\begin{cases} -\Delta \beta = 0, & \forall y \in Z^+ \cup P, \\ \beta = -y_2, & \forall y \in P^0, \end{cases}$$

- Résultats numériques pour NS stationnaire
- Pas de différence entre lois de paroi du premier et du second ordre

$$u_A^{1,1} = u^0 \chi_{[\Omega^0]} + \left[ \frac{\partial u^0}{\partial x_2} x_2 \right] \chi_{\Omega^\epsilon \setminus \Omega^0} + \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} (\beta - \bar{\beta}) + \bar{\beta} \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} (1 - x_2)$$

## Extension linéaire dans la région rugueuse

$$u^0 = \left[ \frac{C}{2} (1 - x_2) x_2 \right] \chi_{[\Omega^0]} + \left[ \frac{\partial u^0}{\partial x_2} x_2 \right] \chi_{\Omega^\epsilon \setminus \Omega^0}$$

- Pas besoin de corrections du saut de  $\nabla u$  à travers  $\Gamma^0$   
 $\implies$  mais corriger  $u$  sur la frontière  $\Gamma^\epsilon$
- Résolution du problème cellule

$$\begin{cases} -\Delta \beta = 0, & \forall y \in Z^+ \cup P, \\ \beta = -y_2, & \forall y \in P^0, \end{cases}$$

- Résultats numériques pour NS stationnaire
- Pas de différence entre lois de paroi du premier et du second ordre

$$u_A^{1,1} = u^0 \chi_{[\Omega^0]} + \left[ \frac{\partial u^0}{\partial x_2} x_2 \right] \chi_{\Omega^\epsilon \setminus \Omega^0} + \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} (\beta - \bar{\beta} x_2)$$



## Extension linéaire dans la région rugueuse

$$u^0 = \left[ \frac{C}{2} (1 - x_2) x_2 \right] \chi_{[\Omega^0]} + \left[ \frac{\partial u^0}{\partial x_2} x_2 \right] \chi_{\Omega^\epsilon \setminus \Omega^0}$$

- Pas besoin de corrections du saut de  $\nabla u$  à travers  $\Gamma^0$   
 $\implies$  mais corriger  $u$  sur la frontière  $\Gamma^\epsilon$
- Résolution du problème cellule

$$\begin{cases} -\Delta \beta = 0, & \forall y \in Z^+ \cup P, \\ \beta = -y_2, & \forall y \in P^0, \end{cases}$$

- Résultats numériques pour NS stationnaire
- Pas de différence entre lois de paroi du premier et du second ordre

$$u_A^{1,1} = u^0 \chi_{[\Omega^0]} + \left[ \frac{\partial u^0}{\partial x_2} x_2 \right] \chi_{\Omega^\epsilon \setminus \Omega^0} + \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} (\beta - \bar{\beta} x_2)$$

- ① Trouver le lien entre les deux approches
- ② Approximations d'ordre élevé
  - Explicite
    - > Dérivation
    - > Taux de convergence
  - Implicite
    - > Dérivation
    - > Taux de convergence
- ③ Preuves numériques

# Connection entre Jäger *et al* et Achdou *et al*

Formellement

- De manière évidente:

$$u_A^0 = u_J^0 + x_2 \frac{\partial u^0}{\partial x_2}(x_1, 0) \chi_{\Omega^\epsilon \setminus \Omega^0}$$

- De façon moins évidente:

Le pbm cellule de Jäger = relèvement particulier du pbm d'Achdou

$$\beta_J = \beta_A + y_2 \chi_P$$

- Alors

$$u_J^{1,1} = u_A^{1,1} + \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} \bar{\beta} \chi_{[\Omega^\epsilon \setminus \Omega^0]} x_2$$

- De plus

$$\bar{\beta}_J = \bar{\beta}_A$$

Localisation dans  $\Omega^\epsilon \setminus \Omega^0$  de la différence

$$u_J^{1,1} = u_A^{1,1} + \epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} \bar{\beta} \chi_{[\Omega^\epsilon \setminus \Omega^0]} x_2$$

implique que

### Proposition

$$\left\| u_J^{1,1} - u_A^{1,1} \right\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq C \epsilon^{\frac{3}{2}}$$

- > Même ordre de convergence par rapport à  $u^\epsilon$
- > Même loi de paroi
- > Mais technique de Achdou *et al.* plus facile à étendre aux ordres supérieurs.

# Approximation 1<sup>er</sup> ordre exacte sur $\Gamma^\epsilon$

- A partir de l'approximation précédente  
Le reste  $O(\epsilon)$  mais l'erreur est **linéaire** sur  $\Gamma^\epsilon$
- Comme  $\bar{\beta} \in [0, 1]$ , on recommence indéfiniment

$$u^{1,1} = u_{\text{ext}}^0 + \epsilon \frac{\partial u^{0,\epsilon}}{\partial x_2} \left( \beta \left( \frac{x}{\epsilon} \right) - \bar{\beta} x_2 \right)$$

# Approximation 1<sup>er</sup> ordre exacte sur $\Gamma^\epsilon$

- A partir de l'approximation précédente  
Le reste  $O(\epsilon)$  mais l'erreur est **linéaire** sur  $\Gamma^\epsilon$
- Comme  $\bar{\beta} \in [0, 1]$ , on recommence indéfiniment

$$u^{1,\infty} = u_{\text{ext}}^0 + \frac{\epsilon}{1 + \epsilon \bar{\beta}} \frac{\partial u^{0,\epsilon}}{\partial x_2} \left( \beta \left( \frac{x}{\epsilon} \right) - \bar{\beta} x_2 \right)$$

L'approximation est exacte sur  $\Gamma^\epsilon$

$$u^{1,\infty} = 0, \quad \forall x \in \Gamma^\epsilon$$

# Approximation 1<sup>er</sup> ordre exacte sur $\Gamma^\epsilon$

- A partir de l'approximation précédente  
Le reste  $\mathcal{O}(\epsilon)$  mais l'erreur est **linéaire** sur  $\Gamma^\epsilon$
- Comme  $\bar{\beta} \in [0, 1]$ , on recommence indéfiniment

L'approximation est exacte sur  $\Gamma^\epsilon$

$$u^{1,\infty} = 0, \quad \forall x \in \Gamma^\epsilon$$

On a éliminé l'erreur sur  $\Gamma^\epsilon$  mais il reste encore les erreurs

- sur  $\Gamma^1$
- dues au terme source dans  $\Omega^\epsilon \setminus \Omega^0$ ,  $u_A^{1,1}$  linéaire dans  $\Omega^\epsilon \setminus \Omega^0$

- L'approximation  $u^{1,\infty}$  est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u^{1,\infty} = C \chi_{[\Omega^\epsilon \setminus \Omega^0]}, & \forall x \in \Omega^\epsilon, \\ u^{1,\infty} = 0, & \forall x \in \Gamma^\epsilon, \\ u^{1,\infty} = \frac{\epsilon}{1 + \epsilon \bar{\beta}} \frac{\partial u^{0,\epsilon}}{\partial x_2} (\beta - \bar{\beta}), & \forall x \in \Gamma^1, \end{cases}$$

## Proposition

On pose  $W^{1,\infty} = u^\epsilon - u^{1,\infty}$

$$\|W^{1,\infty}\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq C_1 \epsilon + C_2 e^{-\frac{1}{\epsilon}}$$

l'erreur est seulement due au terme source

- On a besoin de l'approximation 2<sup>nd</sup> ordre



- Extension du profil de Poiseuille sur tout  $\Omega^\epsilon$ .

$$u_{\text{ext}}^0(x) = \frac{C}{2}(1 - x_2)x_2, \quad \forall x \in \Omega^\epsilon$$

Sur  $\Gamma^\epsilon$ , on a

$$u_{\text{ext}}^0 = \underbrace{\epsilon \frac{\partial u^0}{\partial x_2} \left( \frac{x}{\epsilon} \right)}_{\text{corrigé par CCL 1}^{\text{er}} \text{ o.}} + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_2^2} \left( \frac{x}{\epsilon} \right)^2$$

- pbm cellule du  $2^{\text{nd}}$  ordre

$$\begin{cases} -\Delta \gamma = 0, & \forall y \in Z^+ \cup P, \\ \gamma = -y_2^2, & \forall y \in P^0, \end{cases}$$

- Approximation macroscopique du  $2^{\text{nd}}$  ordre

$$u^{2,\infty} = u_{\text{ext}}^0 + \frac{\epsilon}{1 + \epsilon \bar{\beta}} \frac{\partial u^0}{\partial x_2} \left( \beta \left( \frac{x}{\epsilon} \right) - \bar{\beta} x_2 \right) + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_2^2} \left( \gamma \left( \frac{x}{\epsilon} \right)^2 - \bar{\gamma} x_2 \right)$$

- On itère jusqu'à ce que l'approx. soit exacte sur  $\Gamma^\epsilon$

$$\begin{aligned} u^{2,\infty} &= u_{\text{ext}}^0 \\ &+ \frac{\epsilon}{1 + \epsilon\bar{\beta}} \frac{\partial u^0}{\partial x_2} \left( \beta \left( \frac{x}{\epsilon} \right) - \bar{\beta} x_2 \right) \\ &+ \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_2^2} \left[ \left( \gamma \left( \frac{x}{\epsilon} \right)^2 - \bar{\gamma} x_2 \right) - \bar{\gamma} \frac{\epsilon}{1 + \epsilon\bar{\beta}} \left( \beta \left( \frac{x}{\epsilon} \right) - \bar{\beta} x_2 \right) \right] \end{aligned}$$

### Proposition

On pose  $W^{2,\infty} = u^\epsilon - u^{2,\infty}$ ,

$$\|W^{2,\infty}\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq C e^{-\frac{1}{\epsilon}},$$

$$\|W^{2,\infty}\|_{L^2(\Omega^0)} \leq C \sqrt{\epsilon} e^{-\frac{1}{\epsilon}}$$

- On sépare les variables micro des variables oscillation rapide

$$u^{2,\infty} = u^2 + \epsilon \frac{\partial u^2}{\partial x_2} \left( \beta \left( \frac{x}{\epsilon} \right) - \bar{\beta} \right) + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_2^2} \left( \gamma \left( \frac{x}{\epsilon} \right) - \bar{\gamma} \right)$$

où  $u^2$  est explicite et satisfait

$$\begin{cases} -\Delta u^2 = C, & \forall x \in \Omega^0 \\ u^2 = \epsilon \bar{\beta} \frac{\partial u^2}{\partial x_2} + \frac{\epsilon^2}{2} \bar{\gamma} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_2^2}, & \forall x \in \Gamma^0, \\ u^2 = 0, \forall x \in \Gamma^1 \end{cases}$$

## Proposition (Estimation d'erreur)

On pose  $W^2 = u^\epsilon - u^2 = u^\epsilon - u^{2,\infty} + u^{2,\infty} - u^2$

$$\|W^2\|_{L^2(\Omega^0)} \leq \|W^{2,\infty}\|_{L^2(\Omega^0)} + C'\epsilon \left[ \|\beta - \bar{\beta}\|_{L^2(\Omega^0)} + \epsilon \|\gamma - \bar{\gamma}\|_{L^2(\Omega^0)} \right]$$

- On sépare les variables micro des variables oscillation rapide

$$u^{2,\infty} = u^2 + \epsilon \frac{\partial u^2}{\partial x_2} \left( \beta \left( \frac{x}{\epsilon} \right) - \bar{\beta} \right) + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_2^2} \left( \gamma \left( \frac{x}{\epsilon} \right) - \bar{\gamma} \right)$$

où  $u^2$  est explicite et satisfait

$$\begin{cases} -\Delta u^2 = C, & \forall x \in \Omega^0 \\ u^2 = \epsilon \bar{\beta} \frac{\partial u^2}{\partial x_2} + \frac{\epsilon^2}{2} \bar{\gamma} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_2^2}, & \forall x \in \Gamma^0, \\ u^2 = 0, \forall x \in \Gamma^1 \end{cases}$$

## Proposition (Estimation d'erreur)

On pose  $W^2 = u^\epsilon - u^2 = u^\epsilon - u^{2,\infty} + u^{2,\infty} - u^2$

$$\|W^2\|_{L^2(\Omega^0)} \leq K e^{-\frac{1}{\epsilon}} + K' \epsilon^{\frac{3}{2}}$$

Il est impossible d'atteindre des ordres de convergence élevés  
sans inclure l'influence des CCL

- Simulations numériques dans Achdou *et al.*:  
pas de différences entre lois de paroi 1<sup>er</sup> et 2<sup>nd</sup> ordres:  
pas d'explication.
- On cherche des approximations **incluant** les oscillations des CCL

# Lois de paroi micro-macro d'ordre un

## Dérivation formelle

- L'approximation  $u^{1,\infty} = u^1 + \epsilon \frac{\partial u^1}{\partial x_2} \left( \beta \left( \frac{x}{\epsilon} \right) - \bar{\beta} \right)$  résout

$$\begin{cases} -\Delta u^{1,\infty} = C, & \forall x \in \Omega^0, \\ u^{1,\infty} = \epsilon \frac{\partial u^1}{\partial x_2} \beta \left( \frac{x}{\epsilon} \right), & \forall x \in \Gamma^0 \end{cases}$$

Mais le CCL pollue sur  $\Gamma^1$

- Nouvelle loi de paroi

$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{U} = C, & \forall x \in \Omega^0, \\ \mathcal{U} = \epsilon \frac{\partial u^1}{\partial x_2} \beta \left( \frac{x}{\epsilon} \right), & \forall x \in \Gamma^0 \\ \mathcal{U} = 0, & \forall x \in \Gamma^1 \end{cases}$$

### Proposition

On pose  $W_{bl}^1 = u\epsilon - \mathcal{U}$

$$\|u^\epsilon - \mathcal{U}\|_{L^2(\Omega^0)} \leq \|W^{1,\infty}\|_{L^2(\Omega^0)} + \|u^{1,\infty} - \mathcal{U}\|_{L^2(\Omega^0)}$$

# Lois de paroi micro-macro d'ordre un

## Dérivation formelle

- L'approximation  $u^{1,\infty} = u^1 + \epsilon \frac{\partial u^1}{\partial x_2} \left( \beta \left( \frac{x}{\epsilon} \right) - \bar{\beta} \right)$  résout

$$\begin{cases} -\Delta u^{1,\infty} = C, & \forall x \in \Omega^0, \\ u^{1,\infty} = \epsilon \frac{\partial u^1}{\partial x_2} \beta \left( \frac{x}{\epsilon} \right), & \forall x \in \Gamma^0 \end{cases}$$

Mais le CCL pollue sur  $\Gamma^1$

- Nouvelle loi de paroi

$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{U} = C, & \forall x \in \Omega^0, \\ \mathcal{U} = \epsilon \frac{\partial u^1}{\partial x_2} \beta \left( \frac{x}{\epsilon} \right), & \forall x \in \Gamma^0 \\ \mathcal{U} = 0, & \forall x \in \Gamma^1 \end{cases}$$

### Proposition

On pose  $W_{bl}^1 = u\epsilon - \mathcal{U}$

$$\|u^\epsilon - \mathcal{U}\|_{L^2(\Omega^0)} \leq C\epsilon^{\frac{3}{2}} + C'e^{-\frac{1}{\epsilon}}$$

- De la même manière

$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{V} = C, & \forall x \in \Omega^0, \\ \mathcal{V} = \epsilon \frac{\partial u^2}{\partial x_2} \beta\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_2^2} \gamma\left(\frac{x}{\epsilon}\right), & \forall x \in \Gamma^0 \\ \mathcal{V} = 0, & \forall x \in \Gamma^1 \end{cases}$$

## Proposition

Si on pose  $W_{bl}^2 = u^\epsilon - \mathcal{V}$ , on a

$$\|W_{bl}^2\|_{L^2(\Omega^0)} \leq C e^{-\frac{1}{\epsilon}}$$

- Conclusion:

Pour l'écoulement de Poiseuille  $\mathcal{V}$  est **exponentiellement** proche de la solution du problème rugueux



- Lois précédentes explicites: nécessité de calculer  $u^1$  ou  $u^2$ ,  $\bar{\beta}$  ou  $\bar{\gamma}$ .
- Existe-t-il une loi oscillante et implicite ?

On propose de résoudre

$$\begin{cases} -\Delta \Upsilon = C, & \forall x \in \Omega^0, \\ \Upsilon = \epsilon \beta\left(\frac{x_1}{\epsilon}, 0\right) \frac{\partial \Upsilon}{\partial x_2}, & \forall x \in \Gamma^0, \\ \Upsilon = 0, & \forall x \in \Gamma^1, \end{cases}$$

On a besoin seulement de  $\beta\left(\frac{x_1}{\epsilon}, 0\right)$ .

- A-t-on convergence ?

### Théorème

*Hypothèses:*

- $P^0$  suffisamment régulier
- $P^0$  ne touche pas  $\Gamma$
- on pose  $W_{\text{bl},i}^1 = u^\epsilon - \Upsilon$ ,

*Alors on a :*

$$\|W_{\text{bl},i}^1\|_{L^2(\Omega^0)} \leq K\epsilon^{\frac{3}{2}}.$$

*où  $K$  constante indépendante d' $\epsilon$ .*

### Idée de la preuve

- 1 Décomposer  $W_{\text{bl},i}^1 = W^{1,\infty} + \mathcal{U} - \Upsilon \equiv W^{1,\infty} + \Theta$
- 2 Se ramener à un problème de Robin sur  $\Theta$
- 3 Utiliser les résultats de convergence sur lois de paroi  $u^1, \mathcal{U}$

- Calcul solution exacte  $u_{\Delta}^{\epsilon}$ 
  - Canal rugueux longueur fixée  $L = 10$ ,
  - Frontière rugueuse périodique,

$$P^0 = \{y \in \mathbb{R} / y_2 = -\cos(y_1)/2 - \frac{1}{2} - \delta\}, \delta = 5e - 2,$$

- rheolef code éléments finis 2D
  - Calcul sur une seule cellule macro

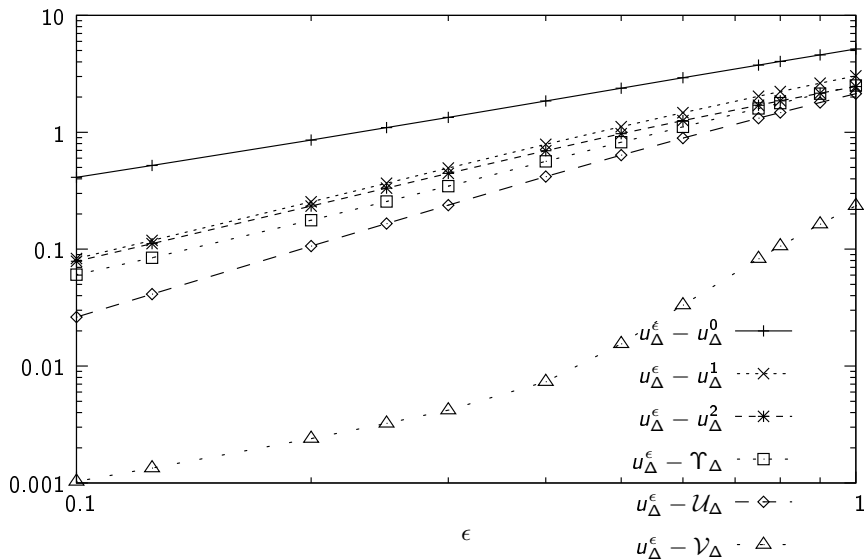
- Construction d'une sol. approchée

- 1 Les problèmes cellule  $\beta_{\Delta}, \gamma_{\Delta}$
- 2 Extraire info pertinente

$u^1$	$\bar{\beta}$	$\mathcal{U}$	$\beta(y_1, 0), \bar{\beta}$
$u^2$	$\bar{\beta}, \bar{\gamma}$	$\mathcal{V}$	$\beta(y_1, 0), \bar{\beta}, \gamma(y_1, 0), \bar{\gamma}$
$\Upsilon$	$\beta_{\Delta}(y_1, 0)$		

- 3 Calcul des solutions macro sur le domaine lisse  $\Omega^0$
- Faire varier  $\epsilon$
  - Calcul de l'erreur sur le domaine entier  $(0, L) \times (0, 1)$

# Estimations d'erreur



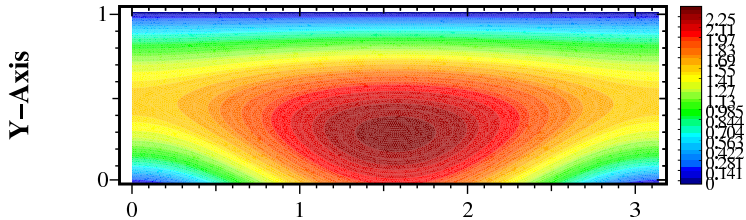
Si on pose

$$\|W^i\|_{L^2(\Omega^0)} = C\epsilon^{\alpha_i}$$

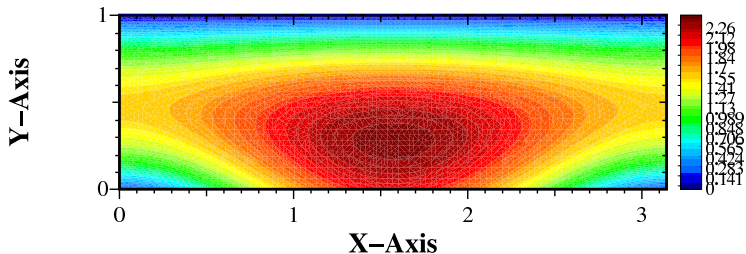
approx.	$\alpha$
$u_{\Delta}^{\epsilon} - u_{\Delta}^0$	1.11
$u_{\Delta}^{\epsilon} - u_{\Delta}^1$	1.4786
$u_{\Delta}^{\epsilon} - u_{\Delta}^2$	1.3931
$u_{\Delta}^{\epsilon} - \mathcal{V}_{\Delta}$	1.768
$u_{\Delta}^{\epsilon} - \mathcal{V}_{\Delta}$	2-3.6
$u_{\Delta}^{\epsilon} - \Upsilon_{\Delta}$	1.6227

Ces estimations ne sont pas optimales:  
errors de projection de  $u^{\epsilon}$  sur les maillages des solutions approx macro

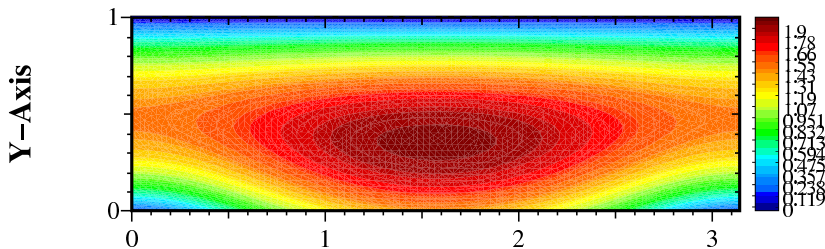
**rugous solution eps=0.5**



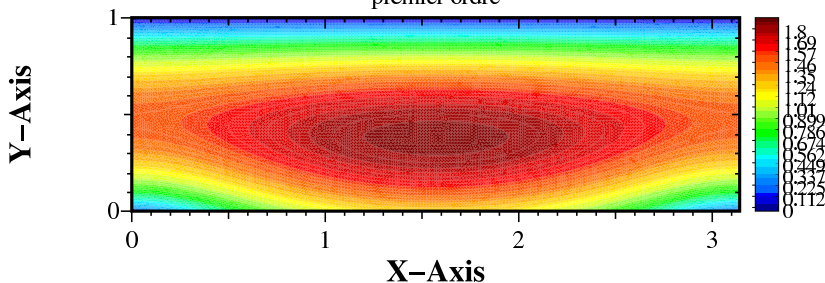
**so mm bl eps=0.5**



fo mdbl eps=0.5



loi de paroi implicite  
premier ordre



- Conclusions

- ① Le cas linéaire: pleine compréhension des mécanismes des CCL
- ② Pas de loi de paroi moyennée d'ordre élevé
- ③ Premier ordre implicite incluant les oscillations
- ④ Preuve numérique de l'optimalité des résultats théoriques

- Perspectives

- Perturber
  - flux
  - géométrie
- Flot de Womersley
- Le cas non-linéaire
- Les géométries spécifiques des stents multi-couche de Cardiatis

- Remerciement

soutien financier de Cardiatis



