

Day 2

Recap • $M_g := \left\{ \begin{array}{l} \text{surfaces hyperboliques fermées} \\ \text{de genre } g \end{array} \right\}$

• dX mesure de Weil-Petersson sur M_g

• S_g une surface hyperbolique aléatoire de WP de genre g

• $0 \leq a < b$

$N_{[a,b)}(X) := \# \left\{ \gamma \text{ géodésique fermée primitive} \mid \overset{\text{longueur de } \gamma}{\ell(\gamma)} \in [a, b) \right\}$

Théorème (Mirzakhani - Petri '17)

$$N_{[a,b)}(S_g) \xrightarrow[g \rightarrow \infty]{(d) \text{ en loi}} \text{Poi} \left(\int_a^b \frac{\cosh(x)-1}{x} dx \right)$$

En général : $(X_n)_n$ une suite de variables aléa
 $X \sim \text{Poi}(\lambda)$

$$\mathbb{E}(X_n^k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X^k), \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

$\Downarrow$ méthode des moments

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} X$$

Plus pratique :

$$\mathbb{E}(X_n^k) := \mathbb{E}[X_n(X_n-1)\cdots(X_n-k+1)]$$

$\downarrow n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E}(X_n^k) = \lambda^k, \forall k \xRightarrow[\text{moments}]{\text{méthode des moments}} X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} X$$

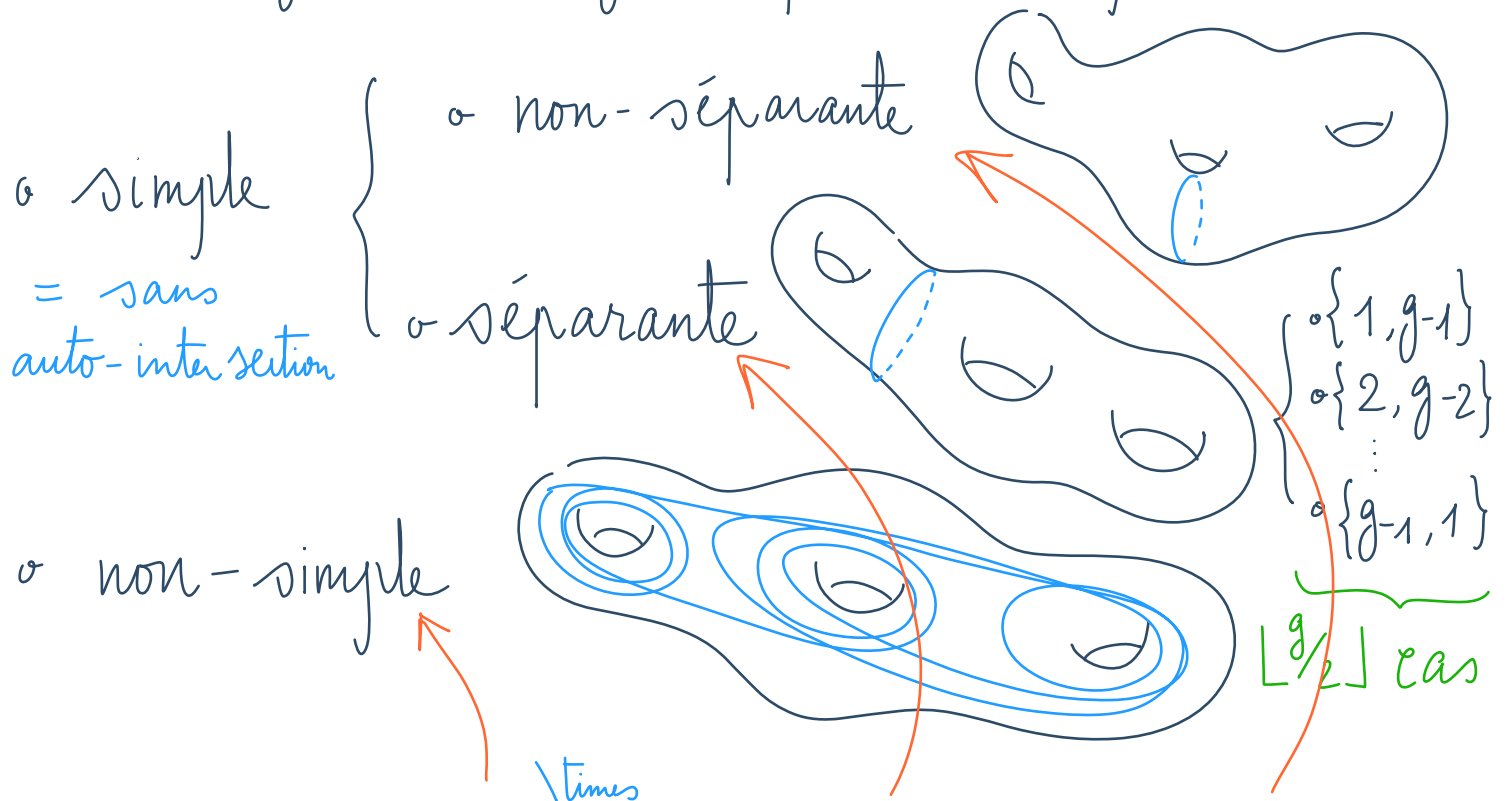
Proposition (MP) $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$$\mathbb{E}[\underbrace{N_{[a,b]}(S_g)}_{\text{factoriels}}]^k \xrightarrow{g \rightarrow \infty} \left(\int_a^b \frac{\cosh(x)-1}{x} dx \right)^k$$

$$\# \left\{ (x_1, \dots, x_k) \mid \begin{array}{l} x_1, \dots, x_k \text{ géod} \\ 2 \text{ à } 2 \text{ distinctes} \end{array}, \ell(x_i) \in [a,b] \forall i \right\}$$

Aujourd'hui : $k = 1$.

Une classification des géodésiques fermées primitives :



$$N_{[a,b)}(X) = N_{[a,b)}^{\times \text{ times}}(X) + N_{[a,b)}^{\div}(X) + N_{[a,b)}^{\smile}(X)$$

Proposition (MP) lorsque $g \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E}(N_{[a,b)}^{\times}(\mathcal{S}_g)) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{g}\right)$$

$$\mathbb{E}(N_{[a,b)}^{\div}(\mathcal{S}_g)) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{g}\right)$$

$$\mathbb{E}(N_{[a,b)}^{\smile}(\mathcal{S}_g)) \xrightarrow{g \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{\cosh(x) - 1}{x} dx$$

But Calculer $\mathbb{E}[\mathcal{N}_{[a,b)}^{\circ}(S_g)]$

$$= \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{M}_g)} \int_{\mathcal{M}_g} \# \left\{ \gamma \text{ géod sur } X \mid \begin{array}{l} \gamma \text{ simple, non-sép} \\ l(\gamma) \in [a,b) \end{array} \right\} dX$$

monde discret
 $\int \rightarrow \sum, \text{vol} \rightarrow \#$

$$= \frac{1}{\#\mathcal{M}_g} \sum_{X \in \mathcal{M}_g} \# \{ \gamma \text{ sur } X \mid \dots \}$$

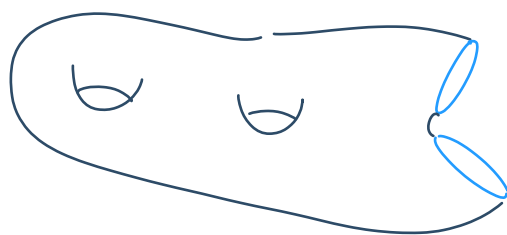
$$= \frac{1}{\#\mathcal{M}_g} \# \left\{ (X, \gamma) \mid \begin{array}{l} X \in \mathcal{M}_g \\ \gamma \text{ sur } X, \gamma \text{ simple, non-sép} \\ l(\gamma) \in [a,b) \end{array} \right\}$$

une bijection:



(X, γ)

bij



(X', τ)
 twist

$\in \mathcal{M}_{g-1,2}(l(\gamma), l(\gamma))$

$\{ \text{surf hyp de genre } g-1 \text{ avec 2 compos de bord géod de longueur } l(\gamma) \}$

$$\{ (X, \gamma) \} \longleftrightarrow \left\{ (X', \tau) \mid \begin{array}{l} X \in \mathcal{M}_{g-1,2}(l, l) \\ l \in [a, b) \\ \tau \in [0, l) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \stackrel{\text{bij}}{=} \frac{1}{\# \mathcal{M}_g} \# \{ (X, \tau) \}$$

$$= \frac{1}{\# \mathcal{M}_g} \sum_{l=a}^b \sum_{\tau=0}^{l-1} \# \mathcal{M}_{g-1,2}(l, l)$$

$\sum_{\tau=0}^{l-1} 1 = l$

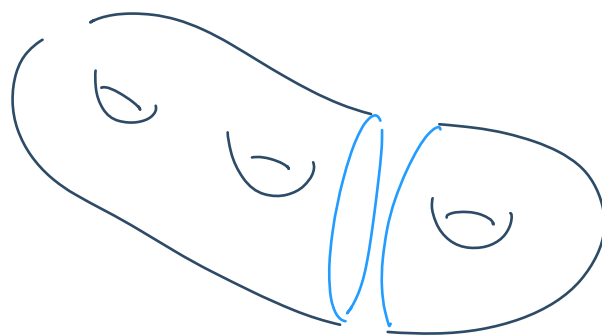
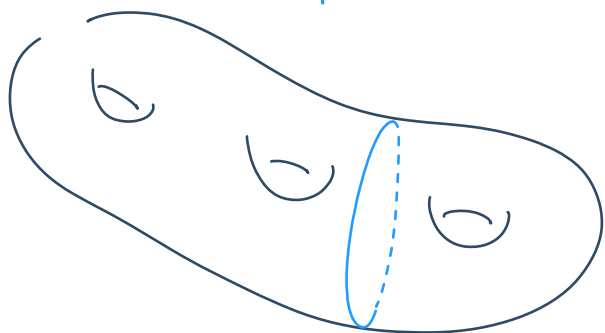
$$= \frac{1}{\# \mathcal{M}_g} \sum_{l=a}^b l \cdot \# \mathcal{M}_{g-1,2}(l, l)$$

monde continu

$$= \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{M}_g)} \int_a^b l \cdot \text{vol}(\mathcal{M}_{g-1,2}(l, l)) dl$$

$$= \frac{1}{V_g} \int_a^b l \cdot V_{g-1,2}(l, l) dl$$

Pour γ sép



$$(X, \gamma) \mapsto (X', X'', \tau)$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $\mathcal{M}_{g_1,1}(l(\gamma)) \quad \mathcal{M}_{g_2,1}(l(\gamma))$

Donc on a

$$\bullet \mathbb{E}[N_{[a,b)}^{\circ}(S_g)] = \frac{1}{V_g} \int_a^b V_{g-1,2}(x,x) \cdot x \, dx$$

$$\bullet \mathbb{E}[N_{[a,b)}^{\circ}(S_g)] = \sum_{\substack{\{g_1, g_2\} \\ g_1 + g_2 = g}} \int_a^b \frac{V_{g_1,1}(x) \cdot V_{g_2,1}(x)}{V_g} \cdot x \, dx$$

il faut donc comprendre $V_{g,n}(x_1, \dots, x_n)$

Plus général (cas simple non-sép)

$$\sum_{X \in M_g} \sum_{Y \sim X} F(X, Y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\tau=0}^l \sum_{X \in M_{g-1,2}(l,l)} F(X', \tau)$$

Maistrop général... On suppose $F(X, Y) = f(l(Y))$

$$\begin{aligned} \sum_{X \in M_g} \sum_{Y \sim X} f(l(Y)) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\tau=0}^l \sum_{X'} f(l) \quad \text{où } f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} f(l) \cdot l \cdot \#M_{g-1,2}(l,l) \end{aligned}$$

monde
 $\rightsquigarrow$
 continu

$$\int_{\mathcal{M}_g} \sum_{\substack{Y \text{ sur } X \\ \text{simple} \\ \text{non-sép}}} f(l(r)) dX = \int_0^\infty f(l) \cdot l \cdot V_{g-1,2}(l, l) dl$$

formule d'intégration de Mirzakhani

$$f = \mathbb{1}_{[a,b]} \Rightarrow N[a,b]$$

Théorème (McShane '91) Pour toute $X \in \mathcal{M}_{1,1}(0)$

$$\int_{\mathcal{M}_{1,1}(0)} \sum_{\substack{Y \text{ sur } X \\ \text{simple}}} \frac{1}{e^{l(r)} + 1} dX = \int_{\mathcal{M}_{1,1}(0)} \frac{1}{2} dX = \frac{1}{2} V_{1,1}(0)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^l + 1} \cdot l \cdot V_{0,3}(l, l, 0) dl = \underbrace{1}_{=1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Gamma(2) \cdot \zeta(2) = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\Rightarrow V_{1,1}(0) = \frac{\pi^2}{6}$$

il faut donc généraliser cette identité pour aller plus loin

Théorème (thèse de Mirzakhani)

$V_{g,n}(x_1, \dots, x_n)$ est un polynôme.

Théorème (Mirzakhani - Petri) Uniformément pour $x \in [a, b]$

$$\frac{V_{g-1,2}(x, x)}{V_g} \underset{g \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{\sinh(x/2)}{x/2} \right)^2 = 2 \frac{\cosh(x) - 1}{x}$$

Corollaire

$$\mathbb{E}[N_{[a,b)}^{\smile}(S_g)] \xrightarrow{g \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{\cosh(x) - 1}{x} dx$$

Théorème (Mirzakhani - Zograf) $\exists C > 0$

$$V_g \underset{g \rightarrow \infty}{\sim} C \cdot \frac{(2g-3+n)!}{\sqrt{g}} \cdot (4\pi^2)^{2g-3+n}$$

Conjecture : $C = 1/\sqrt{\pi}$

Théorème (MP) Lorsque $g \rightarrow \infty$, uniformément pour $x \in [a, b]$

$$\sum_{\substack{\{g_1, g_2\} \\ g_1 + g_2 = g}} \frac{V_{g_1,1}(x) \cdot V_{g_2,1}(x)}{V_g} = O\left(\frac{1}{g}\right)$$

Corollaire

$$\mathbb{E} \left[N_{[a,b)}^{\div}(S_g) \right] = O\left(\frac{1}{g}\right)$$

Il reste $N_{[a,b)}^{\times}$

Théorème Toute géodesique fermée primitive **non-simple** sur une surface hyperbolique (n'importe laquelle)

a une longueur $\geq 4 \sinh^{-1}(1) \approx 3.5225$

Corollaire Si $b < 3.5$, alors $N_{[a,b)}^{\times}(X) = 0$,
 $\forall X \in \mathcal{M}_g, \forall g$

Théorème (Basmajian)

Pour toute géodesique fermée avec k auto-intersections, on a

$$l(\gamma) \geq \frac{1}{2} \log \frac{k}{2}, \quad \forall k \geq 1$$