# Day 3

## Formule de trace de Selberg

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire et $\mathcal{C}_c^\infty$

$X$ une surface hyperbolique fermée de genre $g$

On a

transformée de Fourier

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{h}(r_j(X)) = (g-1)\int_{\mathbb{R}} \hat{h}(r)\tanh(\pi r)\, r\, dr$$

$$+ \sum_{\gamma \text{ géod prim}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell(\gamma)\, h(k\,\ell(\gamma))}{2\sinh\left(\frac{k\,\ell(\gamma)}{2}\right)}$$

$r_j(X) \in \mathbb{R} \cup i[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

est une solution de

$\lambda_j = \frac{1}{4} + r_j^2$

---

Idée

$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice

formule de trace :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

côté spectral   côté géométrique

On veut faire $\operatorname{tr} \Delta_X$

Mais $\operatorname{tr} \Delta_X = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots = \infty$

On prend une fonction test $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$

et on regarde "$h(\Delta)$"

Maintenant $\operatorname{tr} h(\Delta) = h(\lambda_0) + h(\lambda_1) + \cdots$

peut converger !

$\Delta \psi_j = \lambda_j \psi_j$

$$(h(\Delta) f)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} h(\lambda_j) \langle f, \psi_j \rangle \psi_j(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} h(\lambda_j) \left( \int_X f(y) \overline{\psi_j(y)} \, dy \right) \psi_j(x)$$

$$= \int_X \underbrace{\left( \sum_{j=0}^{\infty} h(\lambda_j) \psi_j(x) \overline{\psi_j(y)} \right)}_{\text{noyau } K(x,y)} f(y) \, dy$$

On a donc une formule de trace

$$\sum_{j=0}^{\infty} h(\lambda_j) = \int_X K(x,x)\,dx$$

Mais c'est trop général ...

on n'arrive pas à dire grand-chose sur le côté droite ...

On fait dans l'autre sense : on commence par K

Soit $k : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ raisonable

$$d(x,y) = \text{distance entre } x, y \in \mathcal{H}$$

$X = \Gamma \backslash \mathcal{H}$ surface hyp fermée, $D$ un domain fond

On définit le noyau

$$K(x,y) := \sum_{\gamma \in \Gamma} k(d(\tilde{x}, \gamma \cdot \tilde{y}))$$

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{x}, & \tilde{y} & \in & \mathcal{H} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ x, & y & \in & \Gamma\backslash\mathcal{H} \end{array}$$

lemme

$$T_K : f \longmapsto \left( x \mapsto \int_D K(x,y) f(y)\,dy \right)$$

commute avec $\Delta$

Donc $\exists h$ tq

$$\sum_{j=0}^{\infty} h(\lambda_j) = \int_X K(x,x)\,dx = \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_D k(d(x,\gamma x))\,dx$$

$k \rightsquigarrow h$ : transformée de Selberg

(transformée de Fourier pour $\Delta_{\mathbb{H}}$)

$$= \underbrace{\int_D k(d(x,x))\,dx}_{\displaystyle \int_D k(0)\,dx} + \sum_{[\gamma_0]\neq 0} \sum_{\gamma\in[\gamma_0]} \int_D k(d(x,\gamma x))\,dx$$

classe de conjugaison $\neq 0$

$\updownarrow$ bij

géodésique fermée

$$= k(0)\cdot \text{Aire}(X)$$

$$= k(0)\cdot(2g-2)2\pi$$

« terme topologique »

# Théorème (Wu-Xue, Lipnowski-Wright)

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

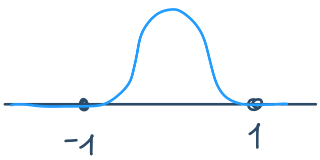
$$\mathbb{P}\left(\lambda_1(S_g) > \frac{3}{16} - \varepsilon\right) \xrightarrow[g\to\infty]{} 1$$

une surface hyp aléa de Weil-Petersson de genre $g$

## Première idée de la preuve

Utiliser la formule de trace de Selberg

On prend une fontion de test de la forme

$h =$ 

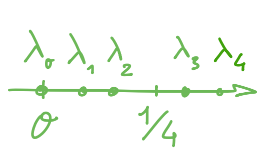
tq

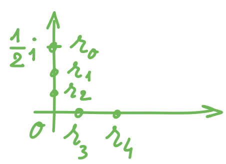
- $h(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\hat{h}(ix) > 0, \ \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

paire

Pour tout $L > 0$, on définit

$$\lambda_j = \frac{1}{4} + r_j^2$$




$$h_L(x) := \frac{1}{2}\big(h(x+L) + h(x-L)\big)$$

$$\Rightarrow \hat{h}_L(r) = \hat{h}(r) \cdot \cos(Lr)$$

$$\begin{cases} \circ \ \cos(L|r|) \text{ si } r \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \text{petite} \\ \circ \ \cosh(L|r|) \text{ si } r \in i\mathbb{R} \rightsquigarrow \text{grande} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ si $\lambda_1 < \frac{1}{4}$, alors le LHS de la formule de trace est petite est grand

On cherche une contradiction :
on veut montrer que le côté droite de la formule est en fait petit grand

$\Rightarrow$ contradiction $\Rightarrow$ $\lambda_1$ est grand

Lemme $\exists C > 0$ tq pour tout $\alpha$ petit
si $\lambda_1 < \frac{1}{4} - \alpha^2$, alors $\hat{h}_L(r_1) \geq C e^{\alpha L}$

Donc

$$\mathbb{P}\left(\lambda_1(S_g) < \frac{1}{4} - \alpha^2\right) \leq \mathbb{P}\left(\hat{h}_L(r_1(S_g)) \geq C e^{\alpha L}\right)$$

$$\overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}\left(\hat{h}_L(r_1(S_g))\right)}{C e^{\alpha L}}$$

$\Rightarrow$ on veut montrer que

$$\mathbb{E}\left[\hat{h}_L(r_1(S_g))\right] \ll e^{\alpha L}$$

On peut choisir $L = L(g)$

Mais on veut pas que ce soit trop grand parceque ça nous oblige à prendre en compte beaucoup de géodésiques

Pourtant...

Dans la formule de trace

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{h}(r_j(X)) = (g-1)\int_{\mathbb{R}} \hat{h}(r)\tanh(\pi r)\, r\, dr + \sum_{\gamma \text{ géod prim}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell(\gamma)\, h(k\,\ell(\gamma))}{2\sinh\left(\frac{k\,\ell(\gamma)}{2}\right)}$$

Le terme topologique : $\underbrace{(g-1)\overbrace{\int_{\mathbb{R}} \hat{h}(r)\tanh(\pi r)\, r\, dr}^{\text{plus au moins une constante}}}_{\gtrsim g}$

Du coup, on doit prendre $L = L(g)$ tq

$$e^{\alpha L} \gg g \Rightarrow L \gg \frac{1}{\alpha} \log g$$

Miracle : une compensation entre les géodésiques primitives, simples, non-sép et $\hat{h}_L(r_0) = \hat{h}_L(i/2)$

$$\mathbb{E}\left( \sum_{\substack{\gamma \text{ géod} \\ \text{prim, simple} \\ \text{non-sép}}} \frac{\ell(\gamma)\, h(\ell(\gamma))}{\sinh\left(\ell(\gamma)/2\right)} \right)$$

formule d'intégration de Mirzakhani

$$= \frac{1}{V_g} \int_0^L \frac{\ell \cdot h_L(\ell)}{\sinh(\ell/2)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot V_{g-1,2}(\ell,\ell)\, d\ell$$

$$\underset{g\to\infty}{\sim} \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\ell^2 h_L(\ell)}{\sinh(\ell/2)} \left( \frac{\sinh(\ell/2)}{\ell/2} \right)^2 d\ell$$

$$= 2 \int_0^L h_L(\ell) \sinh(\ell/2)\, d\ell \approx \int_{-L}^{L} h_L(\ell) \cdot e^{\ell/2} d\ell$$

$$\approx \hat{h}_L\left(\frac{i}{2}\right)$$