Devoir Maison

À rendre le 21/11/2022.

1.1 Problème

La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n \in \mathbb{N}$ et que $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$.
2. En dédure que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour tout entier r, on a $F_{r+n} = F_{n-1}F_r + F_n F_{r+1}$.
4. En déduire que $\mathrm{PGCD}(F_{n+r}, F_n) = \mathrm{PGCD}(F_n, F_r)$.
5. Montrer que $\forall n, k, r \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{PGCD}(F_{kn+r}, F_n) = \mathrm{PGCD}(F_n, F_r)$.
6. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, montrer que :
$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \mathrm{PGCD}(F_n, F_m) = F_d \text{ avec } d = \mathrm{PGCD}(n, m).$$
7. Montrer que si F_n est premier, alors soit $n = 4$, soit n est un premier impair.
8. Vérifier que F_8 est le premier terme divisible par 7. Justifier l'équivalence $7|F_n \iff 7|F_{\mathrm{pgcd}(n,8)}$. En déduire que 7 divise F_n si et seulement si n est un multiple de 8.
9. Déterminer les termes F_n divisibles par 4, puis tous les termes F_n divisibles par 28.

1.2 Exercices

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

1. $95x + 71y = 46$.
2. $20x - 53y = 3$.
3. $2520x - 3960y = 6480$.

Exercice 2 :

On considère le nombre $n = 1024$ écrit en base 10. Écrire m en base 2, en base 3, puis en base 5.

Exercice 3 :

Montrer que 21 est inversible modulo 241 et calculer son inverse.