Examen (Durée 2h)

L'examen est long. Il n'est donc pas nécessaire de tout faire pour avoir la note maximale.
Les documents ne sont pas autorisés.
Les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 :

Considérons les entiers $a = 221$ et $b = 782$.

(1) Déterminer l'écriture de a en base 3.

(2) Déterminer la valuation 2-adique de b.

(3) Calculer le pgcd de a et b que l'on note d.

(4) Déterminer deux entiers $u_0, v_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $au_0 + bv_0 = d$.

(5) Expliciter l'ensemble des couples $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que l'on ait $au + bv = d$.

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes suivants :

(1) $8x \equiv 13 \mod 19$.

(2) $\begin{cases} x \equiv 4 \mod 7 \\ x \equiv 2 \mod 9 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 7x \equiv 5 \mod 17 \\ x \equiv 2 \mod 15 \end{cases}$

Exercice 3 :

Soit G le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}, +, \times)$.

(1) Quel est son ordre ? Expliciter ses éléments.

(2) Rappeler la définition de l'ordre d'un élément dans un groupe. Quel est l'ordre de la classe de 3 dans G.

(3) Le groupe G est-il cyclique ?

(4) Résoudre dans G l'équation $x^3 = \overline{1}$.

Exercice 4 :

On rappelle que l'indicatrice d'Euler $\varphi(n)$ est le cardinal de l'ensemble :

$$\{k \mid 1 \leq k \leq n,\ \text{pgcd}(k, n) = 1\}$$

(1) Donner le lien entre $\varphi(n)$ et l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(2) Calculer $\varphi(p)$ pour p un nombre premier.

(3) Montrer que si p est premier et $r \in \mathbb{N}^*$, alors $\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1}$.

(4) Rappeler l'énoncé du théorème des restes Chinois. En déduire que pour $m, n \in \mathbb{N}^*$ deux entiers premiers entre eux, on a $\varphi(mn) = \varphi(n)\varphi(m)$.

(5) Calculer $\varphi(64)$, $\varphi(125)$, $\varphi(100)$, $\varphi(108)$.

(6) Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^{38} par 108.

Bon travail